

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS-UFAL
INSTITUTO DE FÍSICA
PÓS GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

CAIO VITOR CASTRO MENDES

**CAMINHADA E TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS EM MEIOS
DESORDENADOS**

**MACEIÓ-AL
2021**

Caio Vitor Castro Mendes

Caminhada e Transferência de Estados Quânticos em Meios Desordenados

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física da Universidade Federal de Alagoas - UFAL, Instituto de Física.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Anacleto Barros Fidelis de Moura

Maceió-AL

2021

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas foram de fundamental importância durante este meu processo de doutorado, infelizmente não lembrarei de todos, então, citarei os principais aqui:

- Primeiramente aos meus pais por todo o apoio e suporte em todos os momentos.
- A Estefane Firmino de Oliveira, minha namorada, por me ajudar sempre que precisei.
- Ao professor Francisco Fidelis por todas as discussões e conselhos que me ajudaram a chegar até aqui. Também por sua paciência em me ajudar a entender alguns conceitos relativamente simples que eu não conseguia compreender facilmente.
- Aos meus amigos da sala 01, Demitry, Renato, Ângela e Paulo por todas as conversas sobre física ou não, pelo companheirismo em todos os momentos.
- A todos os companheiros do Instituto de Física, professores, alunos e funcionários.
- A CAPES pela ajuda financeira.

"Mecânica Quântica: Cálculo com Magia Negra".

Albert Einstein.

RESUMO

Segundo a lei de Moore, a cada 18 meses os microprocessadores dobram sua velocidade e, para isso acontecer, é necessário torná-los cada vez menores. Em um futuro não muito distante, estes microprocessadores irão diminuir a ponto de suas portas lógicas ficarem tão pequenas que os efeitos quânticos começarão a ser relevantes. Com isso, faz-se necessário uma nova tecnologia para substituir a atual, nascendo assim a importância de termos uma computação usando as leis da mecânica quântica. Nas últimas duas décadas, muitos pesquisadores de diversas áreas voltaram sua atenção para a computação e informação quântica, elaborando modelos, teóricos e experimentais, análogos aos já existentes no caso clássico, sendo um deles a caminhada quântica. A caminhada quântica surge como um análogo quântico da caminhada aleatória clássica. Assim como a versão clássica trouxe vários avanços na ciência da computação, a versão quântica também tem muito a contribuir, dado que é uma ferramenta muito útil para projetar algoritmos e realizar simulações quânticas. As contribuições científicas apresentadas nesta tese vem a partir de um trabalho onde foi estudado a dinâmica de pacotes de ondas de um caminhante aleatório quântico unidimensional com correlações de longo alcance seguindo uma lei de potência codificada como desordem de fase. Considerou-se que o operador de deslocamento é construído usando como fonte de desordem o traço de um movimento Browniano de densidade espectral $S(k) \propto 1/k^{2\alpha}$, onde o expoente α controla o grau de correlação no sistema. Foi discutido o comportamento de escala do pacote de onda do caminhante e relatado uma transição de localização-deslocalização controlada pelo parâmetro α . Analisou-se também dois regimes dinâmicos intermediários entre localização exponencial e deslocalização total. Além disso, foi feito um estudo acerca da localização usando uma fonte de desordem onde é possível controlar se suas correlações são de curto ou longo alcance e também seu grau de correlação a partir de dois parâmetros específicos. Neste caso, estudou-se a caminhada quântica unidimensional com correlações do tipo exponencial generalizada. Além disso, investigamos aqui uma outra área da computação quântica que não há analogia clássica, a transferência de estados quânticos. Pelo método de diagonalização exata analisamos como um elétron se propaga em uma cadeia unidimensional com duas fontes de desordem. Ademais, relatamos a possibilidade de executar eficientes protocolos de transferência de estados quânticos mesmo com um canal desordenado. Estes estudos abrem brechas para criação de materiais reais de estado sólido para tarefas de processamento de informações quânticas.

Palavras-chave: Informação Quântica. Desordem de Longo Alcance. Transferência de Estados Quânticos. Caminhada Aleatória Quântica.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esfera de Bloch	18
Figura 2 – Cadeia unidimensional	19
Figura 3 – Diferentes tipos de redes. (a) Rede Cristalina, (b) Rede com desordem composicional do tipo lacunas, (c) Rede com desordem composicional do tipo átomos diferentes e (d) Rede com desordem estrutural.	20
Figura 4 – Superior: Ilustração de uma onda incidindo em dois potenciais. Inferior: Conjunto de potenciais aleatórios.	20
Figura 5 – Comportamento qualitativo de $\beta(g)$ para $d = 1,2$ e 3 na teoria de escala apresentada por Abrahams, Anderson, Licciardello e Ramakrishnan	26
Figura 6 – Gráfico de ξ versus E para (a) Sistema cristalino e (b) Sistema sob influência de uma desordem de força $W = 5.0$	28
Figura 7 – Diagrama de fase no plano $(E/t, \alpha)$	38
Figura 8 – Probabilidade vs posição de uma caminhada aleatória clássica.	41
Figura 9 – Probabilidade vs posição para diferentes tipos de condições iniciais. (a) Caminhada Quântica com posição inicial $ \phi\rangle = \downarrow\rangle \otimes 0\rangle$. (b) Caminhada Quântica com posição inicial $ \phi\rangle = \uparrow\rangle \otimes 0\rangle$. (c) Caminhada Quântica com posição inicial $ \phi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \downarrow\rangle\right) \otimes 0\rangle$	48
Figura 10 – Esquerda: V_n e ξ_n para uma cadeia com $N = 16.000$ sítios e $\alpha = 0.5$. A transformação restringe ξ_n ao intervalo $[0, 1]$. Direita: Densidades espectrais dos potenciais. V_n tem um espectro puro de lei de potência (linha sólida). A densidade espectral de ξ_n exhibe o mesmo decaimento geral da lei de potência com flutuações aleatórias. A linha tracejada serve como guia.	52
Figura 11 – A evolução temporal da distribuição de probabilidade do pacote de onda $P_n(t)$ versus n versus t para $\alpha = 0, 1$ e 3 em média sobre 103 realizações de desordem. Para correlações fracas ($\alpha = 0$ e 1), uma fração finita do caminhante permanece localizada em torno da posição inicial $n_0 = N/2 = 3000$. Para $\alpha = 3$, o estado adquire um comportamento semelhante a uma localização.	54
Figura 12 – $\sigma(t)$ versus t para $\alpha = 0.25, 0.75$ e 1.5 em média sobre 103 amostras distintas. Para $\alpha = 1.5$, a largura do pacote de ondas do caminhante exhibe dinâmica balística com $\sigma \propto t$ antes de saturar devido aos efeitos de tamanho finito. O colapso de dados é obtido redimensionando a largura e o tempo linearmente pelo tamanho da cadeia. Observe que para $\alpha = 0.25$, σ é independente do tamanho. Para $\alpha = 0.75$, o colapso dos dados é visto após o reescalonamento adequado da largura e do tempo por uma potência sublinear do tamanho da cadeia.	55

Figura 13 – Largura de função de onda de longo tempo escalonada $\sigma(t = 5N)/N$ versus α para $N = 2000$ a 16000 em média sobre 103 amostras de desordem distintos. Observe que α/N permanece finito e independente de tamanho para α grande.	56
Figura 14 – Dependência do tamanho da largura da função de onda de longo tempo $\sigma(t = 5N)$ versus N para $\alpha = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$ (de baixo para cima). O cruzamento do regime independente de tamanho para o regime de escala linear pode ser efetivamente descrito por um comportamento de lei de potência sublinear da forma $\sigma \propto N$	56
Figura 15 – Expoente de escala de tamanho finito da largura do pacote de onda $\sigma \propto N^\Sigma$, com $\sigma = \sigma(t = 5N)$. Os expoentes da lei de potência são estimados para tamanhos $N = 2000$ a 16000 . Observa-se três regimes distintos: (1) localização completa com $\Sigma = 0$; (2) escala sublinear com $0 < \Sigma < 1$; e (3) deslocalização total com $\Sigma = 1$	57
Figura 16 – Comportamento de longo prazo da probabilidade de retorno $R = P_{n_0}(t = 5N)$ versus α para $N = 2000$ a 16000 em média sobre 103 amostras de desordem distintos. Observe que a probabilidade de retorno permanece finita e não depende do tamanho do sistema para $\alpha < 1/2$	57
Figura 17 – Dependência do tamanho de RN e $RN/\ln N$ em função do tamanho da cadeia para valores representativos de α no regime fortemente correlacionado. A independência de tamanho de $RN/\ln N$ diz o quão relevante é essa correção logarítmica.	58
Figura 18 – Probabilidade de retorno R versus variável de escala $N/\ln N$ para $\alpha = 0, 0.2, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 3.0$ (de cima para baixo). O regime de escalonamento intermediário pode ser efetivamente representado por uma lei de potência sublinear $R \propto \tilde{N}^{-\beta}$ com $0 < \beta < 1$	59
Figura 19 – Expoente de escala de tamanho finito da probabilidade de retorno $R \propto 1/\tilde{N}^\beta$, com $R = P_{n_0}(t = 5N)$, para $N = 2000, 4000, 8000$ e 16000 . Aqui $\tilde{N} = N/\ln N$. Para para cada α e N , calculou-se a média de $P_{n_0}(t)$ em 103 realizações distintas de desordem, foi selecionado as últimas 100 etapas antes de $t = 5N$ e, em seguida, tira-se outra média para finalmente definir R . Nota-se três regimes distintos: (1) $\beta = 0$; (2) $0 < \beta < 1$; e (3) $\beta = 1$ (sinalizando um comportamento linear com correção logarítmica). Um regime sublinear intermediário se desenvolve no intervalo $1/2 < \alpha < 3/2$	59

Figura 20 – Esquerda: Perfil de pacote de onda de longa duração para alguns valores representativos do expoente de correlação α . A probabilidade de ocupação local P_n foi avaliada em $t = 5N$ com $N = 16000$. O painel principal mostra o desenvolvimento de uma cauda exponencial enquanto a inserção enfatiza o decaimento da lei de potência em valores intermediários de α antes do corte exponencial. Direita: comprimento de corte L_c versus α para vários tamanhos N em média sobre 103 realizações distintas de desordem. Embora o corte seja independente do tamanho para $\alpha < 1/2$, ele é dimensionado linearmente com o tamanho do sistema para $\alpha > 3/2$	61
Figura 21 – Topo: ϕ para uma cadeia com $N = 10000$ sítios para $\alpha = 0.25, 0.75$ e $\xi = 1, 10, 100, 1000$. Abaixo: funções de autocorrelação média geradas por $C(r) = \left[1/(N - r) \sum_{n=1}^{N-r} [(\phi_n \phi_{n+r}) - \langle \phi_n \rangle^2]\right]$ com 30 amostras independentes, versus r	64
Figura 22 – Evolução temporal da probabilidade de ocupação $P_n(t)$ versus n para $\alpha = 0.5$ e $\xi = 1$ (painel superior) e $\xi = 1000$ (painel inferior). Observe que o caminhante permanece totalmente localizado para correlações de curto alcance, enquanto uma parte significativa dele se espalha no caso de desordem correlacionada de longo alcance.	65
Figura 23 – Desvio padrão $\sigma(t)$ versus t/N para $\xi = 1$ até $\xi = 1000, \alpha = 0.5$ e $N = 2000$ até 16000.	66
Figura 24 – Propagação escalonada da função de onda de longo tempo $\sigma/N = \sigma(t \rightarrow \infty)/N$ versus ξ/N para $N = 4000$ até 32000 e $\alpha = 0.5, 1, 1.5$	67
Figura 25 – Propagação escalonada da função de onda de longo tempo $\sigma/N = \sigma(t \rightarrow \infty)/N$ versus α para $\xi/N = 0.2$ até 4 e $N = 2000$ até 16000.	68
Figura 26 – Variância local média $\Delta = \sum_{s=1}^{N/\xi} \Delta_s/N_s$ versus α sob s seguimentos $\Delta_s = \sqrt{\langle \theta_n^2 \rangle_s - \langle \theta_n \rangle_s^2}$, onde $\theta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$ e $N_s = N/\xi$. Visto é o resultado de uma média realizada em mais de 20 realizações de desordens independentes para $\xi/N = 0.2, 0.4$, com $N = 10000$	69
Figura 27 – Protocolo de comunicação quântica. Inicialmente, a cadeia de <i>spin</i> está em seu estado fundamental em um campo magnético externo. Alice e Bob estão em extremos opostos da cadeia. Alice situa o estado quântico que deseja comunicar no <i>spin</i> mais próximo a ela. Depois de um tempo, Bob recebe esse estado com alguma fidelidade no <i>spin</i> mais próximo a ele.	72
Figura 28 – Um grafo arbitrário de <i>spins</i> por meio do qual as comunicações quânticas podem ser realizadas usando o protocolo. A comunicação ocorre do <i>spin</i> s do emissor para o <i>spin</i> r do receptor.	73
Figura 29 – O gráfico de barras mostra a fidelidade máxima F da comunicação quântica alcançado em um intervalo de tempo $[0, 4000/J]$ como uma função do comprimento da cadeia N de 2 a 80. O tempo t_0 no qual este máximo é alcançado varia com N	75

Figura 30 – Número de participação redimensionado ξ/N versus E para (a) $\alpha = 3$, $\beta = 0$; (b) $\alpha = 0$, $\beta = 3$; e (c) $\alpha = 3$, $\beta = 3$ para vários tamanhos de sistema. Observe que para $\alpha = \beta = 3$ estados deslocalizados aparecem perto do centro da banda.	81
Figura 31 – Em (a) mostra-se a dependência do tamanho do número de participação para algumas energias típicas, evidenciando a escala sublinear dos estados fracamente localizados próximos à borda da banda. O espectro do comprimento de localização normalizado L/N é mostrado em (b) que sinaliza claramente as bordas de mobilidade. Aqui fixamos $\alpha = \beta = 3$	82
Figura 32 – Número de participação reescalada em torno do centro da banda, $\xi(E \approx 0)/N$ versus α versus β para $N = 8000$. A cadeia é capaz de suportar estados estendidos em torno do centro da banda somente quando as fontes de desordem na diagonal e fora da diagonal são correlacionadas a longo prazo, obedecendo, grosso modo, $\alpha, \beta > 2$	83
Figura 33 – Desvio médio quadrático reescalado (σ/N) versus tempo reescalado (t/N) para (a) $\alpha = 3$, $\beta = 0$, (b) $\alpha = 0$, $\beta = 3$ e (c) $\alpha = \beta = 3$	84
Figura 34 – Participação reescalada (ξ/N) versus tempo reescalado (t/N) para (a) $\alpha = 3$, $\beta = 0$, (b) $\alpha = 0$, $\beta = 3$ e (c) $\alpha = \beta = 3$	85
Figura 35 – Fidelidade máxima versus α sob 500 realizados de desordem independentes em uma rede com 50 sítios (totalizando um total de 52 sítios) para (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 3$. As linhas sólidas, tracejadas e pontilhadas exibem os resultados para $g/J = 0.2, 0.1$ e 0.01 , respectivamente. $F_{max} = \max\{F(t)\}$ evoluiu por um tempo de $tJ \in [0, 2 \times 10^5]$	86
Figura 36 – Fração de amostras que satisfazem $F(t) > 0.9$ e $F(t) > 0.95$ versus tempo em unidades de $t/t_h = \pi J/g^2$. Reuniu-se 500 realizações de desordem independentes para $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $N = 50$ e $g = 0.01J$	88

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO GERAL	14
1.1	Computação Quântica	14
1.2	O <i>Qubit</i>	17
1.3	Modelo de Anderson	18
1.3.1	Formalismo	21
1.3.2	Teoria de Escala	23
1.3.3	Medidas do Grau de Localização: Quantidades independentes do tempo . . .	26
1.3.4	Evolução Temporal	30
1.3.5	Medidas do Grau de Localização: Quantidades Dependentes do Tempo . . .	32
1.3.6	Exceção da Teoria de Escala: Existência de Correlações	34
1.3.6.1	Desordem Correlacionada de Longo Alcance	36
1.3.6.2	Correlação do tipo exponencial generalizada	38
2	CAMINHADAS QUÂNTICAS	40
2.1	Introdução	40
2.2	Caminhada Quântica Discreta	43
2.3	Transição Localização-Deslocalização em Caminhada Quântica em Tempo Discreto com Desordem Correlacionada de Longo Alcance	50
2.3.1	Modelo e Formalismo	50
2.3.2	Resultados e Discussões	52
2.3.3	Considerações Finais	60
2.4	Propriedades de localização de uma caminhada quântica 1D em tempo dis- creto com desordem correlacionado do tipo exponencial generalizado	62
2.4.1	Modelo e Formalismo	62
2.4.2	Resultados e Discussão	63
2.4.3	Considerações Finais	68
3	TRANSFERÊNCIA DE ESTADOS QUÂNTICOS	70
3.1	Introdução	70
3.2	Propriedades de localização e transferência de estado de alta fidelidade em modelos de <i>hopping</i> com desordem correlacionada	79
3.2.1	Modelo e Formalismo	79
3.2.2	Resultados	80
3.2.2.1	Propriedades de localização	80

3.2.2.2	Dinâmica de tempo e transferência de estado quântico	83
3.2.2.3	<i>Timing</i>	87
3.2.2.4	Considerações Finais	89
4	CONCLUSÃO GERAL	90
	REFERÊNCIAS	91
	APÊNDICE A – CÁLCULO FIDELIDADE	105
	APÊNDICE B – ARTIGOS PUBLICADOS	108

1 INTRODUÇÃO GERAL

1.1 COMPUTAÇÃO QUÂNTICA

A mecânica quântica é um ramo da física que teve seu início no ano de 1900, quando Max Planck descobriu que a energia era quantizada. Deste ano até os dias atuais, muitas aplicações foram surgindo em vários ramos diferentes da física, da astrofísica até física de partículas. É neste contexto que surge a ideia de computação e informação quântica, uma das mais audaciosas propostas de aplicação da mecânica quântica.

A computação quântica vem se desenvolvendo com uma velocidade muito rápida. Isto se revela ao analisarmos a linha do tempo da evolução do tema em publicações científicas. A primeira publicação fazendo referência ao termo "computação quântica" foi publicado em 1980 por Paul Benioff (BENIOFF, 1980), onde foi proposto um sistema utilizando mecânica quântica para realizar computação. O avanço foi tão rápido que hoje, pouco mais de 40 anos, discute-se temas como "internet quântica" (BRITO et al., 2020a; BRITO et al., 2020b).

Apesar do primeiro artigo sobre computação quântica ter sido publicado em 1980, a comunidade científica deu mais atenção ao assunto após as publicações de Richard Feynman, no ano de 1982 (FEYNMAN, 1982) e 1985 (FEYNMAN, 1985). Nesta mesma época saiu também um estudo sobre um teorema mostrando que um sistema quântico não pode ser clonado (WOOTERS; ZUREK, 1982). Este trabalho é um ponto positivo para computação quântica, uma vez que sistemas que não podem ser clonados estariam imunes a ataques *hackers*.

No ano de 1985, surgiu a primeira proposta de um computador quântico universal com Deutsch (DEUTSCH, 1985). No ano de 1992, Deutsch e Josza publicaram um trabalho de suma importância e que foi um divisor de águas na área de computação quântica (DEUTSCH; JOZSA, 1992). Com este trabalho, foi possível observar que problemas de computação clássica cujo tempo para realizar uma tarefa era de ordem exponencial, ao utilizar computadores quânticos este tempo é reduzido para ordem polinomial. Outro trabalho muito essencial foi o de criptografia quântica (EKERT, 1991), que tem aplicações em várias áreas, como por exemplo, a transmissão de mensagem com uma criptografia inquebrável por um invasor.

Outro personagem de suma importância na história da computação quântica é o matemático Peter Shor, responsável por publicar artigos sobre como reduzir a decoerência em computadores quânticos (SHOR, 1995), que, até os dias atuais, é um dos gargalos da computação quântica. Além disso, o mesmo autor desenvolveu um algoritmo para realizar a fatoração de um número em seus fatores primos, sendo realizado em um tempo polinomial (SHOR, 1999). Tal

trabalho é de fundamental importância, uma vez que a maioria da criptografia atual é baseada em fatoração de números primos.

Em 1998, foi publicado o primeiro trabalho bem sucedido de implementação de algoritmos quânticos em qualquer sistema físico e foi utilizado um aparelho de ressonância magnética nuclear (JONES; MOSCA, 1998). Porém, este artigo teve algumas críticas, uma vez que os autores não conseguiam garantir o emaranhamento do sistema. Ou seja, não era possível ter certeza que o sistema estava completamente no domínio quântico. Isto se dá pelo excesso de ruído que existia na época em ressonância magnética.

Em 2001, foi publicado um artigo levantando a seguinte questão: "O emaranhamento é necessário para fazer computação quântica?" (LINDEN; POPESCU, 2001). Este artigo tentou sanar a dúvida em relação à ressonância magnética nuclear, uma vez que os trabalhos publicados até o momento não garantiam a existência de emaranhamento. Neste trabalho, os autores confirmaram que o emaranhamento é uma ferramenta necessária para computação quântica. Atualmente, ressonância nuclear magnética continua sendo utilizada para realizar computação quântica, entretanto, o ruído nas máquinas foram reduzidos o suficiente para não restar dúvidas que se está no regime da mecânica quântica. Ainda em 2001, o algoritmo de Shor foi realizado experimentalmente, onde os autores fatoraram o número 15 experimentalmente (VANDERSYPEN et al., 2001). Em um primeiro momento, o fato de fatorar o número 15 parece um problema simples, porém, foi o pontapé inicial para aprimorar os modelos experimentais vigentes.

Em 2003 nasceram os primeiros trabalhos experimentais com outros sistemas além da ressonância magnética nuclear. Foi utilizado elementos ópticos já conhecidos pelos efeitos na mecânica quântica para desenvolver algoritmos quânticos (PITTMAN et al., 2003; O'BRIEN et al., 2003). Sendo assim, as dúvidas referentes aos ruídos em técnicas usando ressonância magnética nuclear foram extintas e não havia mais questionamentos sobre experimentos realizando computação quântica.

Um ano depois, foi levantado um grande problema que, apesar de parcialmente resolvido, segue sendo um empecilho nos avanços de computação quântica em larga escala, que é a realização de uma arquitetura escalável (KAMINSKY; LLOYD, 2004). Equipamentos de ressonância magnética nuclear tem um peso na escala de toneladas, sendo assim, o questionamento de como fazer uma arquitetura de computação quântica escalável é bastante pertinente.

Muitos outros avanços não foram mencionados aqui devido a rápida evolução da computação quântica. Por exemplo, em 2008 surgiu o que é considerado o primeiro computador quântico, o D-Wave One, que no ano de 2013 foi comprado pela Google. A mesma Google

anunciou o alcance da supremacia quântica, ou seja, conseguiram realizar uma tarefa em um computador quântico mais rapidamente do que em um computador clássico (ARUTE et al., 2019).

Como é possível observar, a computação quântica é uma área de estudo que tem uma evolução muito rápida, desde o início, bem como, até os dias atuais. Atualmente, um dos grandes gargalos da computação quântica é o ato de transferir a informação de um ponto a outro de forma eficiente, ou seja, sem perda de informação. Pensando nisso, diversos pesquisadores ao redor do mundo voltaram suas atenções para esta área. Um dos trabalhos apresentados nesta tese se encontra neste contexto de transferência de estados quânticos.

Outro grande flanco ainda aberto é o de simular fenômenos físicos em sistemas quânticos. Para isso, uma plataforma constantemente utilizada pelos cientistas é o da caminhada quântica. Em um capítulo mais a frente é possível ver como usar caminhadas quânticas para simular o efeito de sistemas desordenados em um caminhante quântico.

Precisa-se, antes de tudo, definir o que é um "caminhante quântico" ou o que seria o "estado quântico a ser transferido". Estes entes são representados como a menor unidade de informação, um *bit* quântico, ou também conhecido como *qubit*. Na seção 1.2 deste capítulo, será feito uma breve explicação sobre o que é um *qubit* e como representá-lo. Na seção seguinte, seção 1.3, apresenta-se o Modelo de Anderson, exibindo os diferentes tipos e desordem existentes. Após isso, constrói-se o Hamiltoniano de Anderson a partir do formalismo matemático e sua representação matricial. Além disso, será discutida a teoria de escala e como calcular algumas grandezas, dependentes e independentes do tempo, que são responsáveis por caracterizar se o sistema está em um regime metálico ou isolante. Para finalizar o capítulo, serão estudadas as desordens correlacionadas com foco em dois tipos específicos, desordem correlacionada de longo alcance e desordem correlacionada do tipo exponencial generalizada.

O capítulo 2 iniciará com uma introdução sobre caminhada aleatória clássica e depois sobre caminhadas quânticas, separando-as em dois tipos: em tempo contínuo e em tempo discreto. Ainda na seção de introdução (seção 2.1), traz-se várias referências sobre caminhadas quânticas em tempo contínuo. Na seção seguinte, 2.2, será discutido sobre a caminhada quântica em tempo discreto, trazendo todos os ingredientes necessários para realizar tal caminhada, juntamente com referências para outros tipos de caminhadas além das citadas nesta tese. Por fim, nas seções 2.3 e 2.4, será apresentado os dois artigos publicados na área de caminhadas quânticas em sistemas desordenados com correlações, ambos de autoria própria.

No capítulo 3, será estudado como as transferências de estados quânticos ocorrem, come-

çando com uma breve introdução sobre o tema, passando para o protocolo básico de transferência. Depois, exibe-se uma abordagem para que ocorra uma transferência de estados quânticos perfeita para uma quantidade maior de *qubits*. Por fim, na seção 3.2, apresenta-se o artigo publicado sobre transferência de estados quânticos usando desordem correlacionada. Vale salientar que outro trabalho foi publicado na mesma linha, porém, usando sistemas aperiódicos em vez de desordenados (MESSIAS et al., 2020). Porém, tanto este trabalho como outros que estão em fase de escrita, não entram no escopo desta tese.

1.2 O QUBIT

Sabe-se que a menor unidade de informação para um computador clássico é o chamado *bit*, que é composto por valores lógicos (0 ou 1). Estes valores são codificados, por exemplo, na passagem (ou não) de corrente elétrica nos transistores. Mensagens complexas, que exigem mais do que duas probabilidades (sim ou não, ligado ou desligado, verdadeiro ou falso, etc.) são codificados em sequências de *bits*, tornando então o processamento de informação cada vez mais complexo. Era de se esperar que, ao desenvolver-se a computação quântica, um análogo ao *bit* fosse criado. Este análogo é conhecido como *bit* quântico, ou *qubit*.

A primeira grande vantagem da computação quântica e, conseqüentemente do *qubit*, é o fenômeno de superposição (NIELSEN; CHUANG, 2002). Este é um efeito tipicamente de um regime quântico, não existindo análogo clássico. Por isso, se lida agora em um regime de superposição de estados. Em outras palavras, tem-se uma probabilidade p para o estado 0 e uma probabilidade $p - 1$ para o estado 1.

O *qubit* é representado por um sistema de dois níveis e pode ser expresso como uma combinação linear de dois vetores bases. As amplitudes dos coeficientes que multiplicam estes vetores tem que ser tal que este *qubit* esteja no espaço de Hilbert de duas dimensões. Sendo assim, existe infinitas possibilidades para representação de um *qubit*. Para descrevê-lo de uma forma geral é necessário que a soma dos módulos dos quadrados das probabilidades seja igual a 1. Em outras palavras, significa dizer que o *qubit* precisa ter um vetor estado normalizado. É possível expressar um *qubit* geral como

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \quad (1)$$

onde $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são as bases em que o *qubit* é expresso. Além disso, $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

É possível observar, a partir dos intervalos de θ e ϕ , que os ângulos descrevem a orientação dos vetores em coordenadas esféricas para uma esfera de raio unitário. Então, com esta analogia,

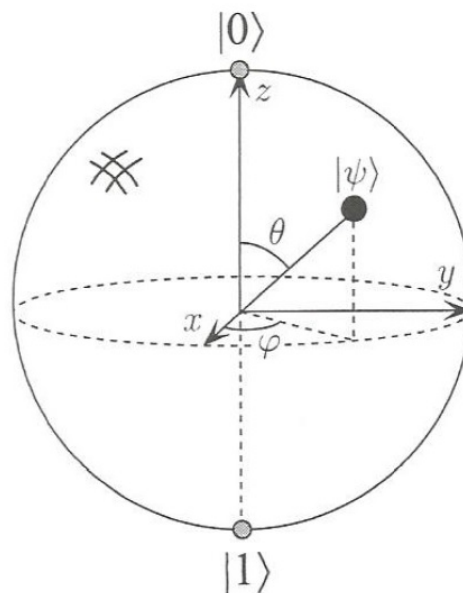
pode-se intuir uma representação geométrica dos *qubits* na superfície de uma esfera, onde cada ponto na superfície desta esfera representa um *qubit*. Note que é possível localizar o *qubit* com:

$$\vec{r} = (x, y, z) = (1 * \text{sen}(\theta) * \cos(\phi), \text{sen}(\theta) * \text{sen}(\phi), \cos(\theta)). \quad (2)$$

Então, o *qubit* pode ser representado por um vetor de tamanho unitário em coordenadas esféricas e os ângulos θ e ϕ estão diretamente relacionados com o modo como se escreve o *qubit*. Com essa representação descreve-se a chamada esfera de Bloch, exibido na figura 1. Como θ e ϕ são contínuos, temos infinitas possibilidades de *qubits*.

É possível representar os *qubits* mais recorrentes na literatura. O primeiro deles é o $|0\rangle$,

Figura 1 – Esfera de Bloch



fonte: (NIELSEN; CHUANG, 2002)

que é encontrado quando, na Eq.(1), temos $\theta = 0$. Pela figura 1, localiza-se este estado no "polo norte" da esfera. Analogamente, se $\theta = \pi$, encontra-se o estado $|1\rangle$, que se encontra no "polo sul". Além deles, é importante observar superposições destes estados, como $|X^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm |1\rangle)$ e $|Y^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle \pm i|1\rangle)$.

1.3 MODELO DE ANDERSON

Philip Warren Anderson desenvolveu a chamada "teoria da localização" no ano de 1958 (ANDERSON, 1958) e, com outros estudos, apresentou diversas contribuições sobre os efeitos de desordem em funções de onda eletrônica. Antes disso, a maior parte dos estudos teóricos

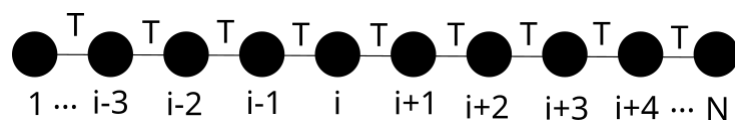
em sólidos era desenvolvido em modelos quânticos sem desordem, isto é, com invariância translacional.

Porém, os sólidos, tanto os encontrados na natureza quanto produzidos em laboratórios, sempre terão defeitos que destroem a invariância translacional e modificam as propriedades físicas previstas pelos modelos teóricos. Um exemplo disso é o modelo de Bloch, que prevê uma resistência nula para cristais perfeitos, entretanto, não é o resultado observado na natureza. Portanto, torna-se importante entender os modelos que adicionam a presença de defeitos na topologia dos sólidos.

Considere um sólido unidimensional, como o exibido na figura 2. Tem-se uma idealização de um conjunto de átomos em uma linha, onde cada átomo terá um conjunto de elétrons preenchendo as camadas eletrônicas, começando com as de mais baixa energia até as de energia mais alta. Porém, as camadas de maior energia não são preenchidas por completo, de forma que os elétrons da camada de valência poderão ter mobilidade, isto é, saltar de um átomo para outro. O objetivo aqui é entender a mobilidade a nível atômico, ou seja, como ocorre a dinâmica eletrônica pelo sólido. Sabe-se que, se o elétron salta do átomo 1 para o átomo 2, depois para o 3 e assim por diante, estabelece-se um termo de corrente elétrica. Precisa-se, então, incorporar os elementos microscópicos do sistema neste fenômeno.

Outro ponto que deve ser considerado são as deformações do material que, em geral,

Figura 2 – Cadeia unidimensional

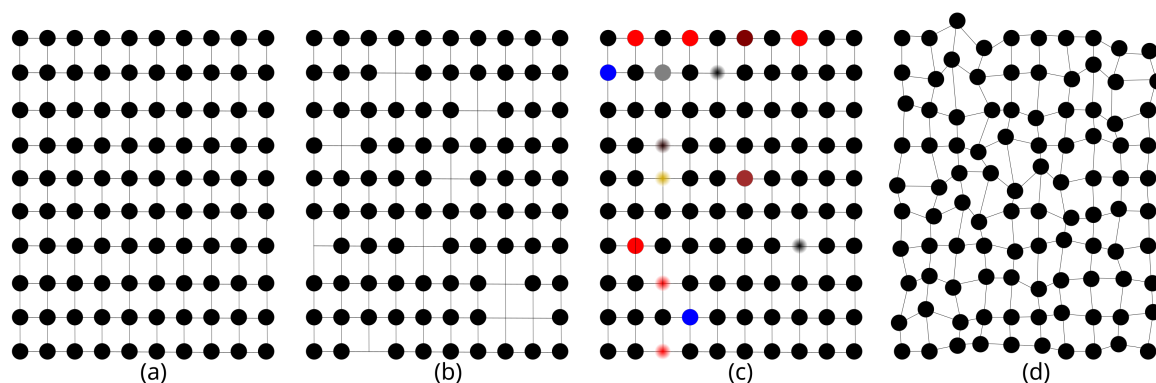


fonte: Autor

tem uma topologia não uniforme. Existem alguns tipos de deformações, como por exemplo, o tipo lacunas, onde existem espaços vazios em vez de átomos. Outro tipo tem a ver com uma deformação estrutural no próprio sólido, onde as distâncias entre os átomos são diferentes. A figura 3 exhibe um conjunto de 4 tipos diferentes de redes, começando em 3(a) com uma rede cristalina, sem imperfeição. As figuras 3(b) e 3(c) representam deformações composicionais da rede. Em 3(b) do tipo lacunas, 3(c) do tipo de átomos diferentes. Por fim, em 3(d) tem-se uma rede com desordem estrutural. Para uma situação semelhante ao da figura 3(a), onde se está lidando com materiais cristalinos, tem-se a teoria de bandas, que já é muito bem estabelecida no ramo da física do estado sólido (KITTEL, 1976). Entretanto, para os casos onde existem algum tipo de desordem, é possível usar uma analogia com a mecânica quântica básica.

Considere o problema de uma barreira de potencia e uma partícula tentando ultrapassá-la.

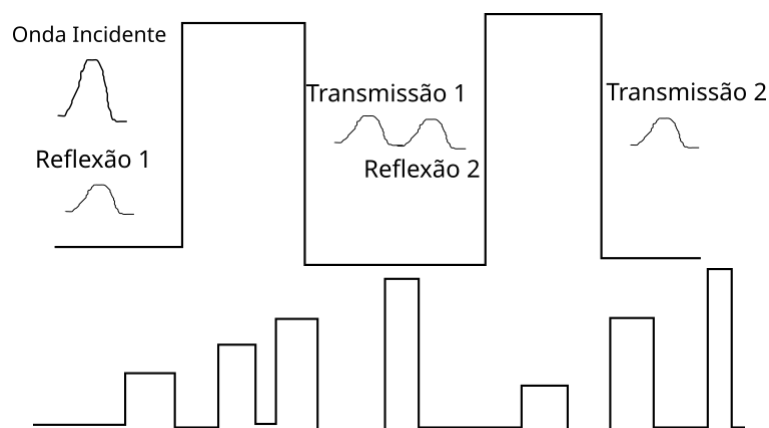
Figura 3 – Diferentes tipos de redes. (a) Rede Cristalina, (b) Rede com desordem composicional do tipo lacunas, (c) Rede com desordem composicional do tipo átomos diferentes e (d) Rede com desordem estrutural.



fonte: Autor

Sabe-se que uma parte da função de onda é transmitida (efeito de tunelamento), enquanto outra parte é refletida (efeito de reflexão). Agora, considere uma segunda barreira de potencial, a função de onda sofrerá os mesmos efeitos, porém, neste caso, a onda transmitida pela primeira barreira encontrará a onda refletida pela segunda, de forma a ocorrer um efeito de interferência, como pode ser visto na figura 4(a). Generalizando, ou seja, adicionando cada vez mais barreiras, de tamanhos e distâncias diferentes 4(b), perde-se a periodicidade e ocorrerá diversos efeitos de interferências. Estas interferências, em geral, são altamente destrutivas, de forma a existir uma função de onda efetiva em que será nula na maior parte do sólido e não nula em uma pequena região. Ou seja, a função de onda fica presa (localizada). Esta destruição da função de onda devido às interferências destrutivas é conhecida como localização de Anderson.

Figura 4 – Superior: Ilustração de uma onda incidindo em dois potênciais. Inferior: Conjunto de potenciais aleatórios.



fonte: Autor

1.3.1 Formalismo

Considere que os átomos estão próximos o suficiente uns dos outros para existir um *overlap* dos orbitais do sítio 1 com o sítio 2 e, assim, o elétron poder saltar entre os átomos. Este *overlap* gera uma energia de interação do sítio 1 para 2 e, conseqüentemente, existirá um termo de salto, que tradicionalmente, é conhecido como termo de *hopping*, representado por T (ver figura 2). Se T for muito pequeno, isto indica que a mobilidade do elétron é baixa, ou seja, os elétrons tendem a ficar localizados em torno da região de origem. Se T for muito grande, o elétron tem alta mobilidade e isto indica que o sistema é mais propício a ser um condutor.

O termo de *hopping* também existe na teoria de Bloch, porém, neste caso, existe apenas a energia cinética $\hat{P}^2/2m$ (usando o operador momento). O termo de acoplamento especial que, no modelo de Bloch, é um termo periódico e, conseqüentemente, pode ser considerado nulo, não entra na expressão. Em resumo, o modelo de Bloch é constituído apenas do termo de *hopping*. É possível então escrever o modelo de Bloch usando o formalismo de *hopping*, para isso, considere que o átomo 1 seja o orbital 1, escrito como $|1\rangle$ e assim sucessivamente para os outros átomos. Assim, os orbitais irão "receber" este elétron que está itinerante pela cadeia, de forma a ser possível escrever a energia cinética por,

$$H_c = T \sum_n |n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|, \quad (3)$$

sendo esta energia referente ao termo cinético. Escreve-se a função de onda do sistema como

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad (4)$$

ou seja, expandindo a função de onda na base de orbitais. Pela equação de Schroedinger tem-se,

$$H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \quad (5)$$

assim, substituindo a Eq.(4) em (5),

$$T \sum_n [|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|] \sum_m c_m |m\rangle = \sum_n E c_n |n\rangle. \quad (6)$$

Então, juntando os termos,

$$T \left[\sum_{n,m} |n\rangle \langle n+1|m\rangle c_n + |n+1\rangle \langle n|m\rangle c_m \right] = \sum_n E c_n |n\rangle. \quad (7)$$

Agora é necessário escrever os termos nas bases iguais. Para isso, no primeiro termo faz-se $m \rightarrow n+1$ e no segundo $m \rightarrow n-1$, ficando com

$$T c_{n+1} + T c_{n-1} = E c_n. \quad (8)$$

Para resolver esta equação, uma solução possível é considerar $c_n = Ae^{ikn}$, substituindo:

$$Te^{ik(n+1)} + Te^{ik(n-1)} = Ee^{ikn}. \quad (9)$$

Divide-se tudo por e^{ikn} , ficando com

$$Te^{ik} + T^{-ik} = E \Rightarrow T2\cos(k) = E \rightarrow E(k) = 2T\cos k. \quad (10)$$

Ou seja, o modelo de Anderson para o termo de *hopping* constante e energia potencial nula equivale ao modelo de Bloch.

Analisa-se agora a situação com desordem e então, escrever o Hamiltoniano de Anderson completo. O Hamiltoniano de Anderson é dado por,

$$H = H_p + H_c, \quad (11)$$

sendo H_c dado pela Eq.(3) e o termo H_p é referente a projeção em um único sítio, ou seja, considerando o elétron estando no orbital n . Então, este termo é a soma sob todos os potenciais locais, sendo escrito como,

$$H_p = \sum_n \epsilon_n |n\rangle \langle n|, \quad (12)$$

onde ϵ_n tem a ver com a energia de ionização, energia necessária para prender o elétron no orbital, sendo diferente para cada átomo. A quantidade ϵ_n é, em geral, a fonte onde atua a desordem. Se ϵ_n for nulo, recupera-se o modelo de Bloch, como visto anteriormente. Define-se ϵ_n como sendo um número no intervalo de $[-W/2, W/2]$, com W sendo conhecido como força (ou largura) de desordem. O Hamiltoniano de Anderson completo é dado por

$$H = \sum_n \epsilon_n |n\rangle \langle n| + T \sum_n (|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|). \quad (13)$$

Aplica-se a equação de Schrödinger novamente, usando as Eq.(4 e 5) e substituindo agora em (13)

$$(\epsilon_n - E)c_n + Tc_{n+1} + Tc_{n-1} = 0 \quad (14)$$

A Eq.(14) é a equação de Schroedinger independente do tempo para a função de onda. Resolver esta equação implica em diagonalizar uma matriz de tamanho $N \times N$, sendo N o número total de átomos do sólido. Porém, quanto maior for N , mais inviável se torna resolver analiticamente, exigindo assim um poder computacional. Entretanto, é possível escrever sua representação

matricial analiticamente. Considere como exemplo o caso de $N = 5$, ou seja, uma matriz 5×5 :

$$H = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & T & 0 & 0 & 0 \\ T & \epsilon_2 & T & 0 & 0 \\ 0 & T & \epsilon_3 & T & 0 \\ 0 & 0 & T & \epsilon_4 & T \\ 0 & 0 & 0 & T & \epsilon_5 \end{pmatrix} \quad (15)$$

é possível observar que o termo da diagonal principal é formado pelos termos de energia potencial ϵ_n , enquanto os termos das sub-diagonais são os termos de *hopping*.

Baseado no modelo de Anderson, alguns modelos foram desenvolvidos ao longo do tempo. Um desses exemplos é o caso onde os termos de *hopping* são aleatórios, sendo seu Hamiltoniano dado por,

$$H = \sum_n \epsilon_n |n\rangle \langle n| + \sum_{n,m} (T_{n,m} |n\rangle \langle m| + c.c.), \quad (16)$$

onde o termo de *hopping* agora depende de (m, n) sendo $n \neq m$. Considera-se que o termo só tem interação dos primeiros vizinhos, ou seja, $T_{n,m} \rightarrow T_{n,n+1} = T_n$, onde T_n é um termo aleatório. Na literatura, existem alguns exemplos de desordem aleatória no *hopping* (BISWAS et al., 2000), que será brevemente exibido aqui.

Um exemplo de aplicação da desordem no termo de *hopping* pode ser visto na referência (BISWAS et al., 2000), onde a energia cinética do sistema é da forma,

$$T_n = \tau + \nu_n, \quad (17)$$

sendo ν_n um conjunto de números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo $[-W, W]$. O termo τ é colocado de forma a evitar que a média de T_n seja zero, uma vez que ν_n é distribuído de forma aleatória uniforme. É importante a média ser diferente de zero para que ocorra a mobilidade dos elétrons.

Outro exemplo também encontrado na literatura, é o caso onde

$$T_n = e^{-\nu_n}, \quad (18)$$

onde ν_n novamente se encontra no intervalo $[-W, W]$. Neste caso não é necessário o termo τ_n , já que a exponencial para um intervalo finito de $|W|$ sempre manterá T_n diferente de zero.

1.3.2 Teoria de Escala

No ano de 1979, Abrahams, Anderson, Licciardello e Ramakrishnan propuseram uma teoria de escala que expõe a dependência da transição metal-isolante com a dimensão do sistema.

A hipótese básica desta teoria de escala é que uma única quantidade característica, a condutância generalizada g , controla a transição de estado estendido para localizado em temperatura zero ($T = 0$) (ABRAHAMS et al., 1979).

A teoria de escala foi proposta na reformulação do modelo de Anderson feita por Thouless (THOULESS, 1974). Neste caso, os sítios atômicos da rede são substituídos por um sistema de blocos, ou seja, o sólido é um hipercubo formado por vários blocos acoplados uns aos outros. As energias características do modelo de Anderson, ϵ_n e T são mapeados respectivamente, no espaço médio entre os níveis ΔE e em δE , que representa o deslocamento causado por mudanças na condição de contorno. Vamos usar algumas relações heurísticas para montar uma relação entre condutividade e as duas quantidades.

O elétron vai atravessar o bloco em um dado tempo t_{df} , onde este tempo e a variação da energia se relaciona pelo princípio da incerteza (ZALLEN, 2008):

$$\delta E \propto \frac{\hbar}{t_{df}}. \quad (19)$$

Quanto maior for o tempo para o elétron atravessar a caixa, menor será a sensibilidade do sistema. Assuma que o elétron atravessa a caixa seguindo um movimento Browniano,

$$T_{df} = L^2/D_f, \quad (20)$$

sendo L a dimensão da caixa, e D_f a constante de difusão. É possível reescrever a Eq.(20) como

$$D_f = \frac{L^2}{T_{D_f}}. \quad (21)$$

Agora, a partir da Eq.(19), pode-se reescrever T_{D_f} como

$$T_{D_f} = \frac{\hbar}{\delta E}. \quad (22)$$

Usando a relação de Einstein,

$$\sigma = e^2 D_f n(e), \quad (23)$$

e substituindo a Eq.(22) em (21) e depois na Eq. (23):

$$\delta E = \frac{\sigma \hbar}{e^2 L^2 n(E)}. \quad (24)$$

Tem-se agora uma equação que relaciona a variação na energia dos blocos e o número de estados por volume $n(E)$. Este termo pode ser escrito como função do espaçamento médio entre os níveis:

$$n(E) = \frac{\text{Numero de estados}}{\text{Volume}} = (1/\Delta E)/L^d \quad (25)$$

Assim, o termo ΔE pode ser escrito como

$$\Delta E = \frac{1}{n(E)L^d} \quad (26)$$

Define-se agora uma razão do tipo $\frac{\Delta E}{\delta E}$, onde esta relação tem o status do inverso de uma condutividade.

$$\frac{1}{g} = \frac{\Delta E}{\delta E} \quad (27)$$

É possível separar esta quantidade em duas situações: A primeira, quando $\delta E > \Delta E$, ou seja, a condutividade alta. Tal resultado faz sentido, uma vez que, em um sistema de condutividade alta (condutor), ao variar as condições de contorno, haverá uma perturbação no sistema que gerará a propagação do elétron por todo o sólido.

Para a situação contrária, onde $\Delta E > \delta E$, as condições de contorno são alteradas de forma a não haver propagação dentro do sólido, desta forma, a variação dos níveis de energia são pequenos e, conseqüentemente, a condutividade é baixa.

Substituindo as Eq.(24) e (25) em (27) observa-se a dependência de escala do parâmetro g

$$g(L) = \frac{\hbar}{e^2} \sigma L^{d-2}. \quad (28)$$

É necessário ter atenção para o fato de que esta equação só é válida no limite de g grande, uma vez que a condição necessária para encontrá-la foi o fato de existir difusão no sistema. É possível então calcular uma função β , conhecida como função de fluxo,

$$\beta(g) = \frac{d[\ln g(L)]}{d[\ln L]} \quad (29)$$

Nesta última equação, percebe-se que a quantidade $\beta > 0$ reflete o crescimento de g com o crescimento de L , enquanto $\beta < 0$ reflete o decréscimo de g com o aumento de L . Resolvendo esta equação, tem-se

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \beta(g) \approx d - 2. \quad (30)$$

Para g pequeno, ou seja, $g \rightarrow 0$, tem-se o caso de um sistema sem condutividade, ou seja, com estados localizados. Sabe-se que este tipo de estado tem um decaimento exponencial, então, é possível assumir que a condutividade neste regime é do tipo

$$g \propto e^{-\gamma L}, \quad (31)$$

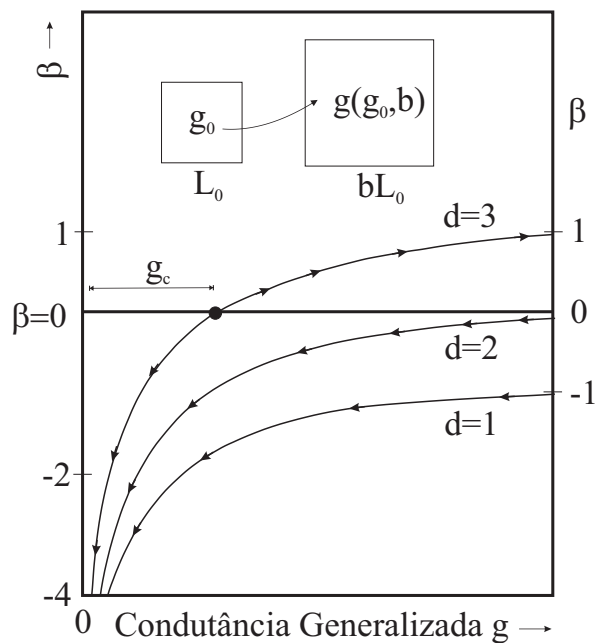
substituindo na função de fluxo

$$\lim_{g \rightarrow 0} \beta(g) = \ln(g) \rightarrow -\infty \quad (32)$$

Assumindo que $\beta(g)$ tenha uma variação lenta e monoatômica entre os limites $g \rightarrow \infty$ e $g \rightarrow 0$, a análise reproduz o comportamento qualitativo da figura 5. As setas do diagrama de fluxo sobre as curvas representam a direção em que g sofre variações quando L cresce. Para $g \rightarrow 0$, observa-se que βg vai para $-\infty$ independente de d e cresce conforme g aumenta. Para $g \rightarrow \infty$, pode-se observar dois limites para $\beta(g)$. Se $d > 2$, g cresce com L , o que é um indicativo de um sistema metálico ou estados estendido. $d \leq 2$, β é negativo, de forma que g diminui com L , o que indica um sistema isolante ou estados localizados. No caso de $d = 1$ e $d = 2$, tem-se estados localizados, para $d = 3$, existe um ponto onde β cruza de negativo para positivo, este ponto é conhecido como Transição de Anderson. Ou seja, em $d = 3$, há a contemplação dos dois regimes, tanto metálico quanto isolante.

Em linhas gerais, a conclusão principal da teoria de escala é que, para $d < 3$, não haverá

Figura 5 – Comportamento qualitativo de $\beta(g)$ para $d = 1, 2$ e 3 na teoria de escala apresentada por Abrahams, Anderson, Licciardello e Ramakrishnan



fonte: (ABRAHAMS et al., 1979)

uma transição metal-isolante, mesmo para um sistema submetido a uma força de desordem fraca.

1.3.3 Medidas do Grau de Localização: Quantidades independentes do tempo

Ao longo dos anos, desenvolveram-se diversas técnicas para estudar o problema da localização de Anderson, seja no âmbito experimental, analítico ou computacional. Aqui será usada uma técnica de diagonalização direta computacionalmente para calcular algumas quantidades que medem o grau de localização dos autoestados do Hamiltoniano de Anderson.

Começa-se calculando um número que meça o grau de localização dos estados, este número é chamado de razão de participação (KRAMER; MACKINNON, 1993).

$$\xi = \frac{\sum_n |c_n|^2}{\sum_n |c_n|^4}. \quad (33)$$

Esta razão fornece uma medida da porção do espaço onde a amplitude da função de onda difere significativamente de zero. Ou seja, tem-se uma projeção de quantos átomos participam do pacote de onda. Para entender como a participação está relacionada com o grau de localização, é possível analisar o caso de uma cadeia cristalina, isto é, sem desordem.

Considere a situação em que todos os autoestados são estendidos com c_n constante. Deve-se lembrar que o numerador da Eq.(33) é igual a 1 ($\sum_n |c_n|^2$) para manter a normalização dos autoestados do Hamiltoniano. Sendo $\sum_n |c_n|^2 = 1$, então, $|c| \sum_n 1 = 1$, onde este somatório tem como resultado N , assim, é possível escrever que $|c| = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Substituindo na Eq.(33),

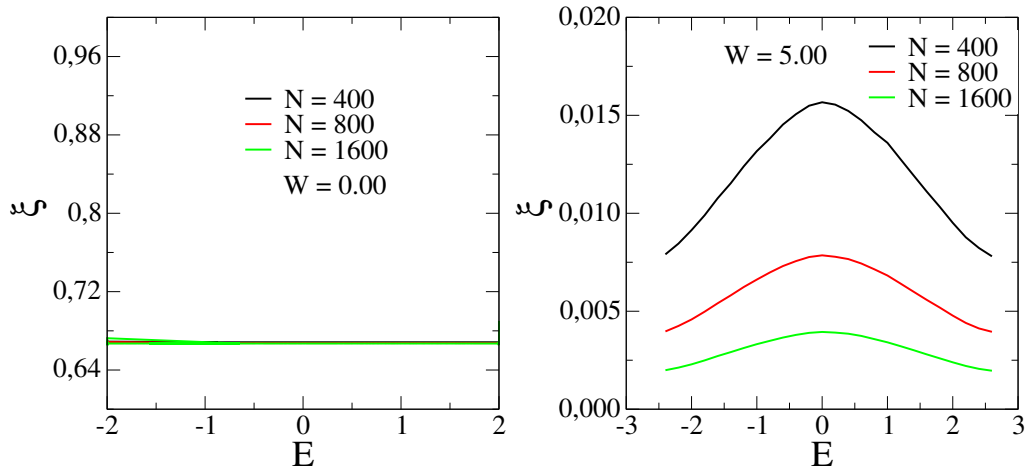
$$\xi = \frac{1}{\sum_n |c_n|^4} = \frac{1}{\sum_n \frac{1}{N^2}} = N. \quad (34)$$

Portanto, ξ é o número de sítios onde as amplitudes c_n da função de onda são diferentes de zero. Para funções de onda localizadas em certa região do espaço, ξ é finito no limite termodinâmico (KRAMER; MACKINNON, 1993).

Na figura 6, apresenta-se a função de participação obtida do Hamiltoniano de um elétron numa cadeia pura cristalina (a) e desordenada (b), para $N = 400, 800$ e 1600 . Em (a), as configurações adotadas foram $\epsilon_n = 0$ e $T = 1$, já em (b), o ϵ_n é um número aleatório entre $W * [-0.5, 0.5]$, define-se a largura de desordem como $W = 5$ e mantém $T = 1$. Entretanto, agora se utilizou 2000 amostras para cada tamanho para o cálculo do valor médio da participação. Além disso, para analisar o fato da participação ser proporcional (ou não) ao tamanho da rede, calculou-se ξ/N em vez de ξ . Como pode ser visto pela Eq.(34), no caso em que ξ/N for constante para qualquer N , é um indicativo de que se está lidando com estados estendidos. Por outro lado, caso não haja o colapso dos dados, é um indício de que o sistema é governado por estados localizados.

Observando a figura 6a é possível concluir, como esperado, que há o colapso dos dados para diferentes tamanhos de N , o que indica que o sistema é governado por estados estendidos. Este resultado era esperado, uma vez que não foi adicionado desordem ao sistema e foi mostrado que, para sistemas cristalinos, tem-se um sistema condutor. Por outro lado, a figura 6b mostra um resultado diferente. Ou seja, neste caso, tem-se que a ξ é proporcional a uma potencia de N .

Figura 6 – Gráfico de ξ versus E para (a) Sistema cristalino e (b) Sistema sob influência de uma desordem de força $W = 5.0$.



fonte: Autor

Em outras palavras,

$$\xi(n) = \begin{cases} N, & \text{Sistema Metálico} \\ N^\alpha, & \text{com } \alpha < 0; \text{ Sistema não é metálico.} \end{cases} \quad (35)$$

O caso metálico é referente a situação em que $\alpha = 1$. É importante salientar que o caso de $\alpha < 0$ foi chamado de "não metálico" pelo fato de haver diferentes regiões até chegar ao isolante. Para $\alpha = 0$, estado em um sistema localizado, ou seja, comportamento isolante. Porém, para $0 < \alpha < 1$, a participação será $\xi \propto N^\alpha$. Dividindo ambos os lados por $1/N$, $\xi/N \propto N^\alpha/N = N^{\alpha-1}$. Considerando a situação em que $N \rightarrow \infty$, como $\alpha - 1$ é menor que zero, se $N \rightarrow \infty$, então, $\xi/N \rightarrow 0$. Ou seja, o sistema acaba não sendo um condutor. Porém, nesta região de α , nem sempre se observa o pacote de onda exponencialmente localizado, é possível ter uma localização do tipo lei de potencia e outras particularidades da função de onda.

Apesar de ser possível observar a região onde há estados estendidos ou localizados, a depender da forma da sua desordem, como por exemplo, uma desordem correlacionada (será abordado mais adiante o assunto), a participação não deixa tão clara as regiões onde temos estados metálicos ou isolantes. Por isso, faz-se necessário tentar observar este fenômeno a partir de outras medidas. Outra estratégia que permite analisar o grau de localização é calcular o comprimento de localização L . Esta quantidade é definida a partir do comportamento assintótico da função de onda (LIFSHITS et al., 1988; KRAMER; MACKINNON, 1993). Em grandes distâncias, a função de onda apresenta um decaimento exponencial do tipo

$$\Psi_i(r) = \psi(r)e^{-\frac{r}{L}}, \quad (36)$$

onde r é a distância ao centro de localização. Para estados estendidos temos que $L \rightarrow \infty$. É muito comum também o encontrar o comprimento de localização relacionado ao chamado expoente de Lyapunov (γ), onde $\gamma = \frac{1}{L}$.

Existem vários métodos para calcular L . Aqui, destaca-se o método de matriz de transferência. Considerando o Hamiltoniano de Anderson e escrevendo a equação de Schrödinger como mostrado na Eq.(14). É possível então reescrevê-la da forma

$$Tc_{n+1} = (E - \epsilon_n)c_n - Tc_{n-1}. \quad (37)$$

Tem-se então uma relação de recorrência para as diversas amplitudes da função de onda. É possível reescrever a Eq.(37) como uma equação matricial

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E-\epsilon_n}{T} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (38)$$

Esta matriz 2 é conhecida como matriz de transferência, onde está se transmitindo a informação do sítio n para $n + 1$. Lembrando que tem-se aqui um sistemas de equações, ou seja, um sistema para cada posição E , então, o conjunto para todos os átomos é escrito como

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E-\epsilon_n}{T} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E-\epsilon_{n-1}}{T} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{E-\epsilon_{n-2}}{T} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \frac{E-\epsilon_1}{T} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Ou, de uma forma compacta

$$\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = \prod_{n=1}^N \begin{pmatrix} \frac{E-\epsilon_n}{T} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Assim, de n para $n - 1$ é uma matriz transferência, de $n - 1$ para $n - 2$ outra matriz transferência e assim por diante.

Estuda-se agora como é possível extrair informações sobre a localização de Anderson usando o comprimento de localização. Assuma que $|c_n|$ vs n , nas bordas, para n grande, tem-se um decaimento exponencial, da forma $e^{-r/L}$. Sabe-se que a função exponencial tem um comprimento de decaimento, que no nosso caso é dado por L . Calcula-se o logaritmo do módulo de c_n/n , ou seja,

$$\frac{\ln|c_n|}{n} \propto \frac{1}{L} \quad (41)$$

Esse L é o comprimento característico para o qual, acima deste comprimento, a função de onda vale zero e é conhecido como comprimento de localização. É possível usar a formulação matricial para entender o comprimento de localização. A partir da Eq.(40) é escrever,

$$\frac{\ln \left[\begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} \right]}{n} = \frac{\prod_{n=1}^N \begin{pmatrix} \frac{E-\epsilon_n}{T} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{n} + \frac{c^*}{n} \quad (42)$$

Neste último termo, como tem-se c_1 e c_0 dividido por um n muito grande, $c_1 \approx c_0$ e, dividido por n , dá zero por n ser muito maior. Além disso, pela relação da Eq.(41) é possível dizer que

$$\frac{1}{n} \prod_{n=1}^N \begin{pmatrix} \frac{E-\epsilon_n}{T} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \propto \frac{1}{L} \quad (43)$$

A Eq.(43) é conhecida como teorema de Furstenberg e Kesten (FURSTENBERG; KESTEN, 1960). O logaritmo do produto de matrizes aleatórias tem como resultado um número constante, em outras palavras,

$$\frac{1}{n} \ln |M_1 M_2 M_3 M_4 \cdots M_n| = \text{constante} \quad (44)$$

O que indica que o comprimento de localização é uma constante. Então, é possível dizer que L não cresce com N . Isto significa dizer que L é pequeno se comparado com o tamanho do sistema, o que é indício de estados localizados.

1.3.4 Evolução Temporal

É necessário tratar agora da equação de Schrödinger dependente do tempo. É possível escrever esta equação como,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H |\psi\rangle, \quad (45)$$

lembrando que a expansão de $|\psi\rangle$ em seus orbitais é dado pela Eq.(4). O lado direito desta equação já foi deduzido anteriormente, é necessário então resolver o lado esquerdo. Substituindo a Eq.(4) na Eq.(45) e resolvendo analogamente ao que foi feito antes, fica-se com

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_n |n\rangle = \epsilon_n c_n + T c_{n+1} + T c_{n-1}. \quad (46)$$

A Eq.(46) representa a equação de Schrödinger dependente do tempo. Vale ressaltar que c_n , c_{n+1} e c_{n-1} são quantidades complexas e n varia de 1 até N , sendo N o número total de átomos do sólido. Existem diversas formas de resolver este problema computacionalmente. Alguns exemplos possíveis são: Pelo Método de Euler, Método de Runge-Kutta de quarta ordem, método de diagonalização direta, etc. Estes métodos podem ser encontrados em detalhes na referência (MOURA et al., 2020). Aqui, será evidenciado o caso do método a partir da diagonalização direta da equação de Schrödinger.

Esta estratégia consiste em resolver usando o formalismo básico de Mecânica quântica. Comece reescrevendo a equação de Schrödinger dependente do tempo da forma:

$$\frac{H}{i\hbar} dt = \frac{d\psi}{|\psi\rangle} \quad (47)$$

Integrando os dois lados e ajustando a equação:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle \quad (48)$$

ou seja, o estado no tempo t é obtido através do estado inicial via aplicação do operador exponencial. Aplica-se agora no modelo de Anderson, para isso, usa-se o problema unidimensional de N átomos já exibido anteriormente. Considere o elétron, no tempo $t = 0$, totalmente localizado no sítio $N/2$, ou seja, no centro da cadeia. Então, o estado inicial será

$$|\psi(t = 0)\rangle = c_n |n\rangle \Rightarrow c_n = \delta_{n, N/2}, \quad (49)$$

ou seja, a amplitude de probabilidade da função de onda vale zero em qualquer outra região, exceto em $N/2$, que tem valor unitário. Expande-se a Eq.(49) na base de autovetores, sendo $\{|A_a\rangle\}$ o conjunto de autovalores

$$|\psi(0)\rangle = \sum_a D_a |A_a\rangle \quad (50)$$

sendo D_a a projeção do estado c_n na direção de $|A_a\rangle$, ou seja,

$$D_a = \langle \psi(0) | A_a \rangle. \quad (51)$$

É necessário então calcular o produto interno. Vale salientar que $|\psi(0)\rangle$ foi dado pela Eq.(49), e que o autoestado $|A_a\rangle$ é um vetor que também pode ser expandido na base de orbitais, que vai ser dado por

$$|A_a\rangle = \sum_n f_n^a |n\rangle. \quad (52)$$

Então, substituindo as Eq.(49) e (52) em (51)

$$D_a = f_{N/2}^a, \quad (53)$$

após a aplicação da delta. Então, o estado $|\psi(0)\rangle$ ficará

$$|\psi(0)\rangle = \sum_a f_{N/2}^a |A_a\rangle. \quad (54)$$

Aplica-se agora o termo do operador de evolução temporal

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iHt}{\hbar}} \sum_a f_{N/2}^a |A_a\rangle \quad (55)$$

O Hamiltoniano atua no autovetor, então, o termo exponencial pode ser colocado "dentro" do somatório, e, após aplicar H em $|A_a\rangle$, tem-se o autovalor multiplicado pelo autovetor, ou seja,

$$|\psi(t)\rangle = \sum_a f_{N/2}^a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} |A_a\rangle, \quad (56)$$

onde E_a é o autovalor do Hamiltoniano H relacionado com o autovetor $|A_a\rangle$. É possível fazer as expansões, de forma que

$$\sum_n c_n(t) |n\rangle = \sum_a f_{N/2}^a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} |A_a\rangle \quad (57)$$

Agora, tem-se um autovetor já exibido anteriormente que também pode ser expandido em função da base de $|n\rangle$, assim

$$\sum_n c_n(t) |n\rangle = \sum_n \left(\sum_a f_{N/2}^a f_n^a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}} \right) |n\rangle \quad (58)$$

Finalmente, pode-se escrever a amplitude de probabilidade de encontrar-se a função de onda no sítio n como

$$C_n(t) = \sum_a f_{N/2}^a f_n^a e^{-\frac{iE_a t}{\hbar}}. \quad (59)$$

Este tipo de modelo tem suas vantagens e desvantagens. Uma de suas maiores vantagens é que não se está lidando com uma aproximação, e sim com a solução exata da equação de Schroedinger, o que torna o resultado mais preciso. Por outro lado, a desvantagem é o custo computacional elevado, uma vez que é para diagonalizar uma matriz com N muito grande (maiores que 10^3 , por exemplo), levaria muito tempo e seria necessário um processamento elevado. No trabalho exibido aqui na tese, este tipo de evolução temporal foi muito útil, uma vez que o foi aplicado no âmbito de Transferência de Estados Quânticos, onde se trabalhou com cadeias pequenas (em torno de $N = 100$). Sendo assim, este tipo de evolução temporal é a melhor escolha para resolver este tipo de problema.

1.3.5 Medidas do Grau de Localização: Quantidades Dependentes do Tempo

Uma vez implementado um formalismo apropriado para resolver a equação de Schrödinger dependente do tempo, as medidas do grau de localização podem ser feitas seguindo um procedimento semelhante ao caso independente do tempo. Pode-se calcular a participação dependente do tempo, dada por

$$\xi(t) = \frac{1}{\sum_n |c_n|^4}. \quad (60)$$

Outra medida interessante sobre a topologia do pacote de onda é o desvio médio quadrático do pacote σ , no qual é calculado seguindo a definição padrão de desvio médio quadrático de uma distribuição de desordem, ou seja, (IZRAILEV et al., 2012),

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n (n - \langle n \rangle)^2 |c_n|^2} \quad (61)$$

sendo $\langle n \rangle = \sum_n n |c_n|^2$ a posição média do pacote de onda.

É possível considerar que, para tempo longo, todos os coeficientes de onda em todos os sítios, tem valor $c_n = c$, ou seja, $|c_n(t \rightarrow \infty)|^2 = |c|^2 = 1/N$, como visto anteriormente. Pode-se então calcular $\sigma(t)$ para tempo longo,

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = \sqrt{(1/N) \sum_n (n - \langle n \rangle(t))^2}. \quad (62)$$

No limite de N grande e considerando a variável $n^* = (n - \langle n \rangle(t))$ e, transformando o somatório em uma integral, tem-se

$$\sigma(t \rightarrow \infty) \propto \sqrt{(1/N) \int_0^N (n^*)^2 dn^*} \propto N \quad (63)$$

Ou seja, no tempo longo, no caso uniforme, tem-se que o σ é da ordem de N , assim como a participação. Novamente, a forma típica do comportamento é dada por

$$\sigma(t) \propto t^b \quad (64)$$

onde $b = 0$ indica localização, $0 < b < 0.5$ indica uma dinâmica subdifusiva, $0.5 < b < 1$ indica uma dinâmica superdifusiva e por fim $b = 1$ indica uma dinâmica balística (estados metálicos). Então, fazendo uma análise de σ é possível caracterizar o comportamento da função de onda. Em geral, o balístico é a região onde existe uma banda metálica. No caso subdifusivo e superdifusivo tem uma dinâmica mais lenta, onde existem algumas ressonâncias dentro do sistema (ou outros casos, ligado, por exemplo, a não linearidade) onde existe a propagação, porém, lenta, do pacote de onda.

Outra medida que pode ser realizada para indicar o comportamento do sistema é a da probabilidade de retorno. Para melhor compreender, supõe-se que, em $t = 0$, um elétron se encontra no sítio i_0 , de modo que $|c_{i_0}(t = 0)|^2 = 1$ e $|c_i(t = 0)|^2 = 0$, para $i \neq i_0$. Pode-se definir a probabilidade de retorno como

$$R(t) = |c_{i_0}(t)|^2 \quad (65)$$

onde i_0 é a posição inicial do elétron. Esta equação exprime a probabilidade de encontrar o elétron no sítio i_0 ao longo do tempo. Se, após um longo tempo, $R(t \rightarrow \infty) = 0$, existe um forte indicativo de que a função de onda eletrônica encontra-se estendida por toda a rede. Porém, se $R(t \rightarrow \infty) \neq 0$, o elétron pode ser encontrado próximo de i_0 , caracterizando uma natureza localizada.

Para estados estendidos, a participação $\xi(t) \propto t^1$, assim como o desvio médio quadrático

$\sigma(t) \propto t^1$. Entretanto, a probabilidade de retorno $R(t) \propto 1/t^1$. Porém, para um tempo longo, pode-se substituir t por N , uma vez que o caminhante já terá se espalhado por todo o sistema (no caso metálico). Já para estados localizados, tanto $\xi(t)$ quanto $\sigma(t)$ e $R(t)$ evoluem para uma constante, i.e., $\xi(t) \propto t^0$, $\sigma(t) \propto t^0$ e $R(t) \propto 1/t^0$. Também é possível encontrar regimes intermediários, como os exibidos no caso independente do tempo.

Em linhas gerais, tanto as grandezas dependentes do tempo quanto as independentes tem um papel fundamental na caracterização da localização do sistema. A principal diferença é que, no caso das funções independentes do tempo, pode-se observar a região (caso exista) onde há uma transição de um sistema metálico para um isolante. O ponto onde ocorre esta transição é chamado de *mobility edge*. Já para os casos dependentes do tempo, podemos analisar sob a perspectiva do elétron se movendo pela rede.

Como foi mostrado extensamente nesta seção, a partir das grandezas dependentes e independentes do tempo, sistemas com imperfeições levam à localização do pacote de onda. Além disso, a teoria de escala mostra que sistemas com $d \leq 2$, independente da força de desordem, sempre será do tipo isolante. Em alguns casos, porém, consegue-se encontrar uma transição metal-isolante em sistemas em 1 e 2 dimensões. Para isso, precisa-se introduzir correlações ao sistema. A próxima seção tratará deste tema levando em conta duas formas de desordem correlacionada específica: a desordem correlacionada de longo alcance e a desordem correlacionada do tipo exponencial generalizada, onde, nesta segunda, conseguimos controlar a partir de um parâmetro, se estamos lidando com desordem de curto ou longo alcance.

1.3.6 Exceção da Teoria de Escala: Existência de Correlações

A teoria de escala diz que, para sistemas de baixa dimensionalidade, ou seja, $d \leq 2$, o sistema tem um comportamento característico isolante. Para $d > 3$, existe a possibilidade de encontrar um comportamento metálico, isto é, uma transição metal-isolante ocorreria. Entretanto, em meados da década de 80, diversos trabalhos relataram uma transição metal-isolante em sistemas de baixa dimensionalidade. Isto se dá pela forma como a distribuição de desordem é feita, seja por respeitar sequências pseudo-aleatórias (GRINIASTY; FISHMAN, 1988; SARMA et al., 1988; THOULESS, 1988) ou apresentando correlações (FLORES, 1989).

Uma das primeiras contribuições sobre o papel das correlações em sistemas de baixa dimensionalidade foi apresentado por Flores no ano de 1989. Em seu trabalho, foi mostrado que o Hamiltoniano de Anderson unidimensional com potencial e amplitude de *hopping* aleatórios pode apresentar uma energia crítica E_c , onde ocorre a deslocalização se forem introduzidas

correlações entre as energias dos sítios e os termos de *hopping*(FLORES, 1989).

Ainda em 1989, Dunlap, Wu e Phillip apresentaram um estudo sobre o Hamiltoniano de Anderson onde a cadeia era composta por ligas binárias, conhecida como modelo de dímero aleatório. Na liga binária, as energias dos sítios podem ser ϵ_A e ϵ_B com probabilidade p e $1 - p$. Além disso, os sítios com energia ϵ_A sempre aparecem em pares e foi mostrado que, se $|\epsilon_A - \epsilon_B| \leq 2J$, onde J é a amplitude de *hopping*, o sistema apresenta um transporte difusivo (DUNLAP et al., 1990).

Após este trabalho, diversos outros estudos fazendo uso de dímeros aleatórios foram realizados e todos mostraram o mesmo resultado: o comprimento de localização diverge em algumas energias críticas(WU; PHILLIPS, 1991; EVANGELOU; KATSANOS, 1992; FLORES; HILKE, 1993; HILKE, 1994; LAVARDA et al., 1994; HEINRICHS, 1995). Experimentalmente, Bellany et al (BELLANI et al., 1999) mostrou que, em super redes de dímeros aleatórios (GaAs-AlGaAs), existem estados estendidos ressonantes.

Mais recentemente, Naether et al mostraram a propagação de luz por uma rede óptica formada por guias de onda fracamente acoplados, onde os autores mantiveram o mesmo tipo de correlação local existente no modelo de dímeros e então observaram que, dependendo da diferença entre ϵ_A e ϵ_B , podemos observar uma clara assinatura do modelo de dímeros aleatórios (NAETHER et al., 2013).

Todos os trabalhos apresentados anteriormente mostram a existência de correlação de curto alcance, entretanto, efeitos relacionados com a presença de correlações de longo alcance em sistemas desordenados também foram analisados. A principal diferença entre as sequências com correlações de curto alcance e as de longo alcance é que esta última não apresenta um comprimento de escala característico (PACZUSKI et al., 1996) e sua densidade espectral é aproximadamente uma lei de potência do tipo $S(k) = 1/k^\alpha$, onde $S(k)$ é obtido através da transformada de Fourier da correlação entre dois pontos $\langle \epsilon_i \epsilon_j \rangle$. Em 1998, Moura e Lyra introduziram uma correlação de longo alcance nos elementos da diagonal do Hamiltoniano de Anderson unidimensional, onde os autores consideraram as energias *on-site* sendo regidas por uma sequência que descreve o traço do movimento browniano fracionário com uma densidade espectral do tipo lei de potência.

1.3.6.1 Desordem Correlacionada de Longo Alcance

A ideia é realizar uma mudança no Hamiltoniano de Anderson. Troca-se a desordem que, tradicionalmente é aleatória, por uma nova desordem com correlações internas. Essas correlações podem vir de várias formas, por exemplo, pode-se considerar um sistema idealizado de correlações. Outra forma é importar séries correlacionadas de sistemas físicos, como o DNA, que tem uma desordem correlacionada. Pode-se trazer o conhecimento de séries aleatórias com correlação para estes modelos e montar um sistema que seria uma variante do modelo de Anderson com essa desordem sendo agora correlacionada.

Um exemplo é importar o conhecimento acerca do movimento Browniano e, a partir dele, criar uma série de números aleatórios com correlações de longo alcance e aplicar esta sequência nas energias potenciais. Para fazer isso, é necessário importar a teoria do movimento Browniano generalizada (também conhecido como fracionária), desenvolvida por Mandelbrot (MANDELBROT; NESS, 1968; MANDELBROT, 1983). O movimento browniano (caminhada aleatória), no caso unidimensional, consiste em um caminhante no centro de uma linha, ele pode se deslocar um passo para esquerda ou para direita. Se ele der um passo para a direita, sua nova posição será o centro da cadeia somando uma unidade de comprimento. Repetindo este movimento ao longo do tempo é possível observar como a posição do caminhante e a posição inicial está relacionada. Pode-se então calcular o incremento médio entre a posição que o caminhante se encontra e a posição inicial.

Considere $B_H(t)$ como a posição do caminhante no tempo t . Ao calcular-se o incremento médio entre t e t_0 , é possível ver que é igual a zero, ou seja, $\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0$. A variância nos incrementos, $V(t - t_0)$ é dada por,

$$V(t - t_0) = \langle [B_H(t) - B_H(t_0)]^2 \rangle = 2D_f \tau (|t - t_0|/\tau)^{2H}, \quad (66)$$

onde τ é o intervalo entre duas observações sucessivas da posição da partícula, D_f é a constante de difusão e H é referente ao expoente de Hurst. Em uma função aleatória $X(t)$, o expoente de Hurst é igual a $1/2$, enquanto em um movimento browniano fracionário, o expoente H é um número real dentro do intervalo $[0,1]$. Vale salientar que as correlações de longo alcance entre os passos só existem no caso de um movimento browniano fracionário, uma vez que a correlação é nula em um movimento browniano simples.

Para gerar uma sequência temporal aleatória $x(t_i)$ que apresente densidade espectral tipo lei de potência, ou seja, $S(\omega) = 1/\omega^\alpha$, Moura e Lyra (MOURA; LYRA, 1998b) utilizaram um formalismo de transformada de Fourier discreta descrito em diversos estudos (TSONIS,

1992; GREIS; GREENSIDE, 1991; HIGUCHI, 1988; FOX, 1989; OSBORNE; PROVENZALE, 1989; BARNSLEY et al., 1988; HIGUCHI, 1990). Suponha que a posição do caminhante seja observada nos instantes de tempo $t_i = i\tau$ e que tenha N valores em um período $T = N\tau$. A densidade espectral tipo lei de potência é imposta pela equação abaixo (FOX, 1989):

$$x_i = x(t_i) = \sum_{k=1}^{N/2} (S(\omega_k)\Delta\omega)^{1/2} \cos(\omega_k t_i + \phi_k), \quad (67)$$

A equação acima é a decomposição de Fourier discreta da sequência x_i . As frequências ω_k são múltiplos da frequência fundamental $\Delta\omega = 2\pi/T$, com $\omega_k = k\Delta\omega$. As $N/2$ fases ϕ_k estão uniformemente distribuídas no intervalo $[0, 2\pi]$ e representam a única fonte de ruído da série. Além disso, definiremos que $\tau = 1$ e $S(\omega) = 1/\omega^\alpha$.

É possível observar que a amplitude de Fourier vai ter um decaimento do tipo lei de potência, onde este decaimento funciona como um filtro para as frequências maiores. É fácil observar que, se $S(k) = 1/k^\alpha$, a depender do valor de α as frequências maiores vão para zero. Assim, a priori, tem-se um peso para cada frequência.

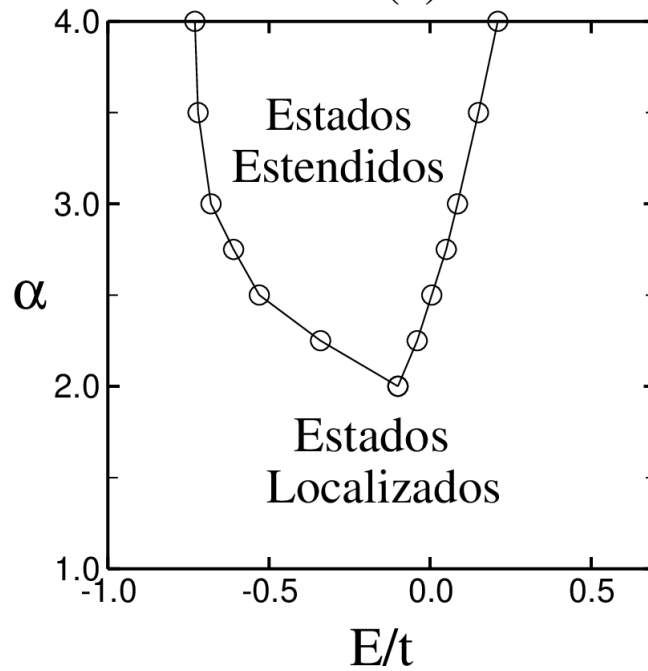
Usa-se a série da Eq.(67) como fonte de desordem. É possível escrever as energias dos sítios (ϵ_i) como

$$\epsilon_i = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{C(\alpha)}{k^{\alpha/2}} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k\right), \quad (68)$$

$C(\alpha)$ é uma constante de forma que tem-se $\langle \epsilon_n \rangle = 0$ e $\Delta\epsilon = \sqrt{\langle \epsilon_n^2 \rangle - \langle \epsilon_n \rangle^2} = C$. Esta distribuição de energias com variância independente do tamanho normaliza a sequência definida pela Eq.(68). O parâmetro α é responsável por controlar o grau de correlação do sistema. Para $\alpha = 0$, a distribuição de energia se torna semelhante à do modelo de Anderson, ou seja, totalmente descorrelacionado. O aumento de α implica o aumento da correlação na distribuição, de forma a ser possível encontrar estados metálicos mesmo em um sistema unidimensional.

A figura 7 mostra a região onde ocorre uma transição metal-isolante no modelo (MOURA; LYRA, 1998a). Os autores realizaram o cálculo do expoente de Lyapunov, ou seja, o inverso do comprimento de localização e mostraram a presença de estados estendidos na região de $\alpha > 2$. Este resultado é importante, uma vez que, diferente dos modelos de curto alcance, para algumas determinadas energias, os estados se encontram estendidos.

Outro tipo de desordem correlacionada que é importante conhecer em mais detalhes é o caso com tipos de decaimento exponencial específico, a desordem correlacionada do tipo exponencial generalizada.

Figura 7 – Diagrama de fase no plano $(E/t, \alpha)$ 

fonte: (MOURA; LYRA, 1998b)

1.3.6.2 Correlação do tipo exponencial generalizada

Para iniciar o estudo sobre correlação do tipo exponencial generalizada, considere o Hamiltoniano de Anderson descrito na Eq.(13). Considera-se inicialmente a sequência E_n definida pela seguinte expressão:

$$E_n = \sum_{m=1}^N \eta_m e^{-\left(\frac{|n-m|}{\xi}\right)^\alpha}, \quad (69)$$

onde η_m representa uma fase aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[-0.5, 0.5]$ e é gerado independentemente para cada amostra. $\{\alpha, \eta\}$ controlam o grau de correlações. O parâmetro α controla o grau da não-gaussianidade na distribuição de desordem. Para $\alpha = 0$ não há desordem, enquanto para $\alpha = 2$ tem-se correlações gaussianas. O caso particular em que $\alpha = 1$ indica correlações com decaimento exponencial, onde ξ acaba sendo o comprimento de correlação padrão (SALES; de Moura, 2012). No limite de $\xi = 0$ é o caso de uma distribuição de desordem completamente não correlacionada.

Estas são funções de correlação versáteis tendo desordem Gaussiana, pura exponencial e não correlacionada como casos particulares. Além disso, correlações exponenciais alongadas frequentemente se desenvolvem durante o processo de relaxamento em materiais vítreos (PHILLIPS, 1996; KAKALIOS et al., 1987; JOHNSTON, 2006; KIRKENGEM; BERGLI, 2009; YU et al., 2015). Modelos de desordem correlacionada exponencial encontram suporte em várias

origens físicas. As funções de correlação exponencial esticada são amplamente conhecidas por surgirem da transição do tipo Kosterlitz-Thouless (DIAS et al., 2010). Comportamento semelhante também pode ser encontrado para o campo diretor nemático (YU et al., 1998), dentro da atividade catalítica enzimática da lipase B de *Candida antarctica* (FLOMENBOM et al., 2005), em distribuições de emissões de rádio e luz de galáxias e economia (LAHERRERE; SORNETTE, 1998).

Um dos trabalhos exibidos aqui se encaixa no contexto de aplicar estas correlações exponenciais em uma caminhada quântica. Pensando nisso, inicialmente aborda-se uma caminhada quântica sem desordem para entender o funcionamento da mesma, antes de abordar os efeitos dos ruídos. Estuda-se o caso de uma desordem correlacionada de longo alcance e depois a desordem do tipo exponencial generalizada.

2 Caminhadas Quânticas

2.1 INTRODUÇÃO

O conceito de caminhadas aleatórias não é novo para as ciências e têm diversas aplicações, tanto na Física quanto em outras áreas de estudo. No ano de 1905 Pearson introduziu pela primeira vez o conceito de caminhada aleatória (PEARSON, 1905). Mais recentemente, Spitzer forneceu uma revisão completa e mais atualizada sobre o assunto (SPITZER, 2013). A caminhada clássica descreve um movimento que consiste em uma sucessão de passos aleatórios em um espaço, podendo ser em uma, duas ou três dimensões.

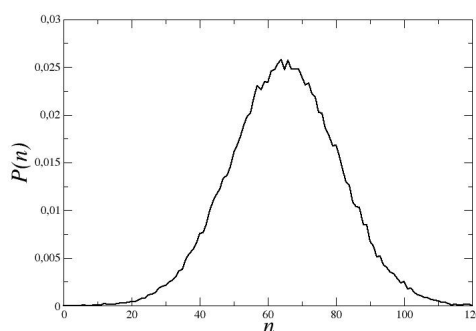
No modelo mais simples de caminhada aleatória, um caminhante pode saltar para posições discretas de acordo com certa distribuição de probabilidade. Para um caso unidimensional, pode-se imaginar um caminhante que salte baseado na face de uma moeda. A moeda será cara ou coroa após o lançamento, e então o caminhante se move para a direita ou esquerda de acordo a partir do resultado do lançamento. É importante salientar que o próximo passo dado pelo caminhante não carrega qualquer relação com o passo anterior e, por isso, a caminhada trata-se de um processo conhecido como Markoviano (NORRIS, 1998).

A fig.8 exibe a distribuição da posição do caminhante $P(x)$ em função de x após uma certa quantidade de passos. Como não é possível prever onde a partícula se encontrará devido ao caráter aleatório do problema, o que pode ser feito é um levantamento estatístico da sua posição, que, neste caso, a maior probabilidade é de se encontrar próximo a posição inicial. Como é possível observar, a distribuição de probabilidade é descrita através de uma distribuição gaussiana, da qual a variância é proporcional ao número de passos n , ou seja, $\sigma^2 \propto n$ (REIF, 2009).

Caminhadas aleatórias tem aplicações em diversos campos da ciência, por exemplo, Albert Einstein formulou o movimento estocástico (na forma de movimento browniano) de partículas devido às colisões entre átomos e moléculas (EINSTEIN, 1905) baseado em caminhadas aleatórias. Também há aplicações em vários outros domínios, como na locomoção, busca e exploração de recursos alimentares feita por animais (VISWANATHAN et al., 1999; CODLING et al., 2008; HUMPHRIES et al., 2010; OKUBO; LEVIN, 2013), na dinâmica de disparo neuronal (TUCKWELL, 1988; GABBIANI; COX, 2017) e tomada de decisão no cérebro (USHER; MCCLELLAND, 2001; GOLD; SHADLEN, 2007). O artigo da referência (MASUDA et al., 2017) trás muitos outros exemplos de aplicações da caminhada aleatória.

Com o desenvolvimento da computação quântica, se fez necessário desenvolver uma

Figura 8 – Probabilidade vs posição de uma caminhada aleatória clássica.



Fonte: Autor

versão da caminhada aleatória clássica¹ baseada nos efeitos intrínsecos da mecânica quântica. No ano de 1993, Yakir Aharonov, Luiz Davidovich e Nicim Zagury publicaram pela primeira vez o análogo quântico da caminhada aleatória clássica, que foi chamado de *Quantum Random Walk* (AHARONOV et al., 1993), ou caminhada aleatória quântica.

É importante salientar que atualmente existe outra vertente referente a caminhadas quânticas sem o termo "aleatório". Em (LAKSHMINARAYAN, 2003), os autores explicaram quando de fato há ou não aleatoriedade em uma caminhada quântica. Esta divisão se dá, pois, devido aos efeitos intrínsecos da mecânica quântica, lida-se com probabilidades de encontrar o caminhante, não com a posição em si. Mantendo os mesmos parâmetros e repetindo o experimento diversas vezes, a distribuição de probabilidade não se altera, perdendo assim a aleatoriedade do problema. O caráter aleatório de uma caminhada quântica se encontra na medição, pois, se repetirmos o experimento com os mesmos parâmetros e a cada rodada do experimento realizar a medição, encontraremos o caminhante em posições diferentes. Assim, em resumo, a aleatoriedade de uma caminhada quântica se encontra apenas na etapa de medição, não mais em todo o processo. O trabalho de Aharonov et. al. se encontra no contexto de aleatoriedade, uma vez que a cada poucos passos os autores realizaram a medição, sendo assim, trata-se de fato de uma caminhada aleatória quântica (AHARONOV et al., 1993).

Existem dois conjuntos principais de caminhadas quânticas: em tempo contínuo (CTQW, do inglês, *continuous-time quantum walk*) e em tempo discreto (DTQW, do inglês, *discrete-time quantum walk*). Em 1998, Farhi e Gutmann, publicaram seu artigo sobre CTQW (FARHI; GUTMANN, 1998). Enquanto a proposta por Aharonov et. al. é do tipo discreto, cujo diferencial é que acontece em intervalos finitos e dependem de um espaço de moedas H_c e um espaço das

¹ para evitar confusões referente a qual caminhada estamos falando, sempre que falarmos da caminhada aleatória desenvolvida por Pearson trataremos como caminhada aleatória clássica.

posições H_p (AHARONOV et al., 1993). O espaço de Hilbert H é formado pelo tensor de H_c por H_p . Entraremos em detalhes sobre a caminhada discreta nas próximas seções.

A caminhada quântica em tempo contínuo é fundamentalmente diferente do caso discreto, visto que, a CTQW ocorre apenas no espaço de posição H_p , uma vez que não temos um espaço das moedas. É realizada definindo um Hamiltoniano de *hopping* em um grafo escolhido e permitindo que o sistema evolua através da equação de Schrödinger. Foram propostos experimentos para ambas variantes da caminhada quântica (WANG; MANOUCHEHRI, 2013; WANG et al., 2020). Alguns exemplos de implementações que foram propostas é o caso de cavidades em micro-ondas (SANDERS et al., 2003), redes ópticas de átomos de Rydberg ultrafrios (CÔTÉ et al., 2006) ou em átomos no estado fundamental (DÜR et al., 2002) em redes ópticas ou usando o momento angular do fóton (ZHANG et al., 2007). CTQWs podem ser implementadas em computadores quânticos de ressonância magnética nuclear (DU et al., 2003), processador quântico (QIANG et al., 2016), conjunto de guias de onda (PERETS et al., 2008) ou em nuvens estruturadas de átomos de Rydberg (MÜLKEN et al., 2007).

Muitos estudos surgiram baseados no modelo de caminhada em tempo contínuo: em (RAZZOLI et al., 2020) os autores abordaram o papel da topologia de grafos e investigaram as suas propriedades de transporte. Alguns tipos de grafos foram estudados especificamente, como é o caso do grafo Quimera (XU et al., 2018), hiper-grafos (LIU et al., 2018; SADOWSKI et al., 2019), grafos bipartidos (TÖDTLI et al., 2016), grafos de estrelas (SALIMI, 2009), grafos dinâmicos (HERRMAN; HUMBLE, 2019), grafos fortemente regulares (GODSIL et al., 2015), em linhas (ABAL et al., 2006), em ciclos (SOLENOV; FEDICHKIN, 2006), em hipercubos (KROVI; BRUN, 2006), em dendrímeros (MÜLKEN et al., 2006), em grafos de árvore coladas (JACKSON et al., 2012), etc.

Outros autores mostraram interesse no tema de desordem e localização. Por exemplo, em (CHATTARAJ; KREMS, 2016) os autores estudaram os efeitos do *hopping* de longo alcance e das interações entre partículas de longo alcance na caminhada quântica em redes unidimensionais desordenadas e ideais. Na referência (MIN; WANG, 2016) estudou-se uma caminhada quântica bidimensional em uma rede de Penrose que é intermediária entre a estrutura periódica e desordenada.

Alguns autores focaram suas atenções em desenvolver algoritmos de busca usando CTQW. (HILLERY et al., 2010) mostrou como uma caminhada quântica pode ser usada para encontrar uma aresta marcada ou um subgrafo marcado em um grafo completo. (MAGNIEZ et al., 2011) propôs um novo método para projetar algoritmos de busca quântica para encontrar um elemento

“marcado” no espaço de estados de uma cadeia de Markov clássica. (WONG et al., 2018), por sua vez, explorou uma a busca espacial por caminhada quântica em tempo contínuo em gráficos de Kronecker. (RHODES; WONG, 2019) investigou a busca em um grafo *bipartite*. No trabalho de Li e colaboradores, os autores consideraram a busca espacial de um estado geral marcado em grafos por caminhadas quânticas em tempo contínuo (LI et al., 2018). Algoritmos de busca também foram realizados em grafos do tipo Johnson (WONG, 2016).

Estudos envolvendo CTQW vem crescendo cada vez mais, uma vez que é um tema novo e com diversas aplicações nas ciências, entretanto, este assunto não faz parte do escopo desta tese, por isso, para mais detalhes sobre o assunto, ver o artigo de revisão da referência (VENEGAS-ANDRACA, 2012). Neste artigo, foi feita uma revisão sobre caminhada quântica, tanto discreta, quanto contínua. Para quem se interessar no tema, este artigo pode servir de base para iniciar os estudos nesta área.

2.2 CAMINHADA QUÂNTICA DISCRETA

Após uma longa introdução sobre caminhada aleatória clássica e caminhada quântica em tempo contínuo, finalmente será discutido um dos pontos centrais desta tese: A caminhada quântica em tempo discreto. As primeiras noções de uma DTQW foi estudada em (AHARONOV et al., 1993). Os autores consideraram a evolução espacial de um sistema controlado por seu estado interno de *spin* 1/2, definido por $U = \exp(-iS_zPl/\hbar)$. O operador P e S_z correspondem ao momento e a componente z do *spin* da partícula, respectivamente. Os autoestados de S_z são denominados $|\pm\rangle$, então, $S_z |\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$. Se a partícula se encontra inicialmente no estado $|\psi(x_0)\rangle ((c_+ |+\rangle + c_- |-\rangle)$, onde $\langle x|\psi(x_0)\rangle$ corresponde ao pacote de onda centrado em torno de x_0 e $|c_-|^2 + |c_+|^2 = 1$, então, após um passo, temos:

$$|\Psi\rangle = c_+ |+\rangle |\psi(x_0 + l)\rangle + c_- |-\rangle |\psi(x_0 - l)\rangle \quad (70)$$

onde $|\psi(x_0 \pm l)\rangle$ é centrado em torno de $x_0 \pm l$. No artigo original, os pesquisadores observaram o comportamento do sistema quando se aplica repetidas vezes o operador unitário U e realiza a medição do sistema de *spin*. Fazendo este procedimento, recupera-se a caminhada aleatória clássica. Os autores mostraram que usando uma evolução bem escolhida pode-se direcionar o sistema na direção que desejar (AHARONOV et al., 1993).

Ao realizar uma medição a cada passo, acaba-se gerando a decoerência, isto é, causa uma interação entre o sistema e o ambiente que, por consequência disto, destrói os estados em superposição e, conseqüentemente, as correlações quânticas que surgem durante a evolução

(KENDON, 2007). Para evitar isto, usaremos as definições de caminhada quântica das pesquisas das referências (AHARONOV et al., 2001; AMBAINIS et al., 2001), onde a medição só realizada ao fim de todo o processo.

A estrutura para a caminhada quântica discreta na linha é caracterizada pelo espaço de Hilbert H , que é formado a partir do produto tensorial do espaço da moeda H_c e da posição H_p . Assim, o espaço total é dado por:

$$H = H_c \otimes H_p. \quad (71)$$

O espaço de posição H_p , é o espaço de Hilbert estendido pelos estados de posição $\{|i\rangle : i \in Z\}$. H_c é o espaço das moedas que é medido pelos vetores de base $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Estes vetores de base representam o estado de uma partícula de *spin* 1/2, onde o *spin up* é $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e o *spin down* é $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e assim eles agem como o "lançamento" da moeda.

Introduz-se agora o operador unitário de deslocamento, cuja função é realizar uma transição entre diferentes estados de posição. O operador de deslocamento age em H da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{S} : |\uparrow\rangle \otimes |i\rangle &\rightarrow |\uparrow\rangle \otimes |i+1\rangle \\ \hat{S} : |\downarrow\rangle \otimes |i\rangle &\rightarrow |\downarrow\rangle \otimes |i-1\rangle. \end{aligned} \quad (72)$$

Assim, quando aplicado o operador deslocamento em um *spin up*, desloca-o para o sítio $i+1$, enquanto para o *spin down* o deslocamento é para $i-1$. Para a caminhada completa, define-se o operador de deslocamento formalmente como:

$$\hat{S} = |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes \sum_i |i+1\rangle \langle i| + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \otimes \sum_i |i-1\rangle \langle i|, \quad (73)$$

que tem as mesmas propriedades da Eq.(72) porém percorrendo todo $i \in Z$.

Discute-se agora que tipo de "cara ou coroa" precisamos. Fisicamente, este "cara ou coroa" é representado por uma rotação no espaço da moeda. Existe uma família de operadores unitários tipo moeda, \hat{C} , que podem ser usadas e cada uma representará um comportamento diferente do nosso caminhante quântico. É possível ter uma caminhada assimétrica, quando usada uma moeda enviesada, ou uma caminhada simétrica, quando usa-se uma moeda sem viés. Uma forma de representar uma moeda para um caso geral é da forma

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-\rho}e^{i\phi} & -\sqrt{\rho}e^{i(\theta+\phi)} \end{pmatrix} \quad (74)$$

sendo $0 \leq \rho \leq 1$ e $0 \leq \theta, \phi \leq \pi$.

O estado da moeda $|\uparrow\rangle$ induz o movimento para direita, enquanto $|\downarrow\rangle$ para esquerda. Note que

$$\hat{C} |\uparrow\rangle = \sqrt{\rho} |\uparrow\rangle + \sqrt{1-\rho} e^{i\theta} |\downarrow\rangle \quad (75)$$

Portanto, dependendo de ρ , o operador moeda aumenta ou diminui a probabilidade de "ir pra direita" ou "ir para esquerda". Os ângulos θ e ϕ não interferem na probabilidade. A moeda sem viés é obtida quando $\rho = 1/2$. O exemplo mais conhecido deste tipo de moeda é a moeda Hadamard, onde, além de $\rho = 1/2$ temos $\theta = \phi = 0$. Entretanto, apenas a moeda não é garantia suficiente de uma distribuição de probabilidade simétrica, pois ainda tem o grau de liberdade da condição inicial. A condição inicial começando no centro de uma linha de comprimento N tem a forma:

$$|\Psi(0)\rangle = [\cos(\alpha) |\uparrow\rangle + e^{i\beta} \sin(\alpha) |\downarrow\rangle] |N/2\rangle, \quad (76)$$

então têm-se dois parâmetros de controle: α e β . Juntamente com a moeda Hadamard, é possível encontrar uma distribuição de probabilidade simétrica na situação onde $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Com todos estes ingredientes, pode-se então construir um novo operador unitário \hat{U} , que atua sob todo H e descreve a evolução do caminhante:

$$\hat{U} = \hat{S} \cdot (\hat{C} \otimes \hat{I}). \quad (77)$$

Para realizar t passos da caminhada quântica, precisa-se aplicar \hat{U} t vezes no estado inicial $|\Psi(0)\rangle$, onde t representa o número de passos ou interações. Escreve-se então:

$$|\Psi(t+1)\rangle = \hat{U}^t |\Psi(0)\rangle \quad (78)$$

Aplica-se agora analiticamente os primeiros passos deste protocolo e observa-se como o caminhante se comporta. Usa-se uma moeda Hadamard e considera o estado inicial como sendo $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$, ou seja, o *spin up* se encontra na posição 0 da linha. Aplica-se o operador

unitário \hat{C} e depois realizar o deslocamento usando \hat{S} .

$$\begin{aligned}
|\Psi(1)\rangle &= \hat{U}^1 |\Psi(0)\rangle \\
&= \hat{S}\hat{C}(|\uparrow\rangle \otimes |0\rangle) \\
&= \hat{S}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle\right) \\
&= \left(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_i |i+1\rangle\langle i|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle\right) + \\
&+ \left(|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_i |i-1\rangle\langle i|\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |1\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |-1\rangle)
\end{aligned} \tag{79}$$

Agora, realizando a medição em $|\Psi(1)\rangle$, obtém-se

$$\begin{aligned}
a_{esquerda} &= \langle\downarrow|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
a_{direita} &= \langle\uparrow|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{80}$$

Assim, a probabilidade será:

$$\begin{aligned}
P(a_{esquerda}) &= |a_{esquerda}|^2 = \frac{1}{2} \\
P(a_{direita}) &= |a_{direita}|^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{81}$$

Continuando este processo, aplicando \hat{U} e realizando a medição, recupera-se a caminhada clássica, o que não é interessante neste momento. Para observar os efeitos quânticos, a medição deve ser realizada após o último passo, de forma que as interferências construtivas e destrutivas ocorram. A partir da tabela 1 e 2 é possível observarmos a diferença de um caminhante quântico (tabela 1) e um caminhante aleatório clássico (tabela 2). O caminhante quântico se encontra no estado inicial $|\Psi(0)\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle$.

Na tabela (1) é possível observar que o caminhante quântico é assimétrico, com um crescimento maior para a esquerda. Isto ocorre devido ao fato de ter sido usado o estado inicial, $|\Psi(0)\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle$, com uma moeda balanceada (fig. 9a). Trocando o estado inicial para $|\Psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$ com a mesma moeda Hadamard, observa-se uma assimetria com o crescimento maior para a direita (fig. 9b).

Com o intuito de encontrar uma distribuição mais simétrica, têm-se algumas opções: Escolher uma condição inicial como $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) \otimes |0\rangle$ e uma moeda balanceada (fig. 9c), ou introduzir uma outra moeda. Um operador que pode ser escolhido é o \hat{M} , que é

Tabela 1 – Probabilidade de encontrar o caminhante na posição i após os passos t da caminhada quântica na linha, com estado inicial em $|\phi\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle$.

t \ i	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		0		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Fonte: (KEMPE, 2003)

Tabela 2 – Probabilidade de encontrar o caminhante na posição i após os passos t da caminhada clássica na linha, começando em $i = 0$.

t \ i	-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Fonte: (KEMPE, 2003)

definido como:

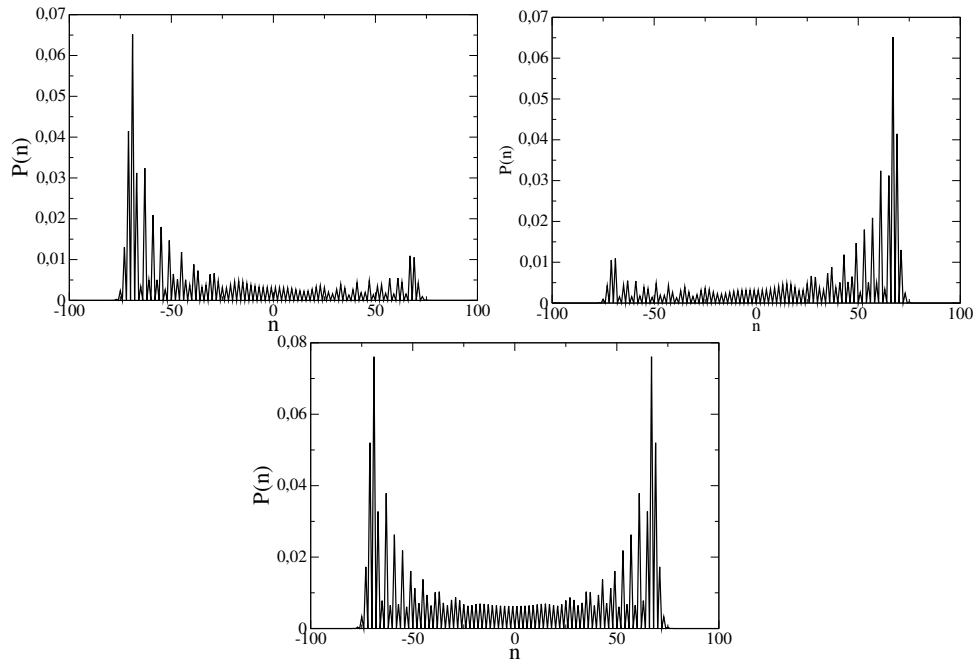
$$\hat{M} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (82)$$

Ao usar esta moeda em particular, a caminhada não é tendenciosa e é independente do estado inicial do sistema.

Na figura 9, é possível ver claramente que a caminhada quântica discreta em uma linha não tem propriedades gaussianas, ao contrário do caso clássico. Em (KONNO, 2005; PORTUGAL, 2018) foi demonstrado analiticamente que a largura (desvio padrão) da distribuição é $\sigma \propto t$, em comparação com o caso clássico de $\sigma \propto \sqrt{t}$. Isso significa que o caminhante que realiza uma caminhada quântica discreta viaja muito mais longe do que sua contraparte clássica.

Todo o protocolo exibido até aqui foi para o caso de uma caminhada quântica discreta unidimensional, porém, existem vários modelos propondo outras abordagens. (MACKAY et al., 2002) estudou a caminhada quântica para d -dimensões, sendo d um número alto. Em (SCHREIBER et al., 2012) os autores apresentaram uma implementação de caminhada quântica em uma rede óptica bidimensional. Realizaram a caminhada ao longo de 12 passos e 169 posições usando uma rede de fibra óptica. Em (ENDO et al., 2014) foi colocado um defeito na posição $x = 0$ de

Figura 9 – Probabilidade vs posição para diferentes tipos de condições iniciais. (a) Caminhada Quântica com posição inicial $|\phi\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |0\rangle$. (b) Caminhada Quântica com posição inicial $|\phi\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |0\rangle$. (c) Caminhada Quântica com posição inicial $|\phi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle\right) \otimes |0\rangle$.



Fonte: Autor

uma linha. (XUE et al., 2016) estudou como uma segunda rotação na moeda afeta o caminhante e abriu espaço para múltiplas rotações. No artigo (XU et al., 2014) estudou-se analiticamente um novo operador de deslocamento, operador de deslocamento *swapping*. Em (VAKULCHYK et al., 2017) os autores estudaram numérica e analiticamente uma caminhada quântica discreta na presença de uma desordem espacial.

Ainda sobre desordem, (CRESPI et al., 2013) realizou um experimento para investigar o efeito da desordem experimentalmente usando divisores de feixes e um deslocador de fase. (RIBEIRO et al., 2004) generalizou o protocolo de caminhada quântica para uma partícula em uma cadeia unidimensional, usando vários tipos de moedas quânticas tendenciosas, dispostas em sequências aperiódicas, de uma maneira que leva a uma rica variedade de possíveis evoluções da função de onda.

Diversos algoritmos de busca foram implementados usando caminha quântica discreta. O primeiro deles foi introduzido por Grover para pesquisar um banco de dados não classificado (GROVER, 1997b; GROVER, 1997a) e posteriormente estendido para algoritmos de busca baseados em caminhada quântica para topologias de banco de dados específicas (SHENVI et al., 2003; REITZNER et al., 2009). (BERRY; WANG, 2010) estudou a busca baseada em caminhada quântica em tempo discreto para um vértice marcado em um grafo. Uma lista de

vários algoritmos usando computação quântica (incluindo caminhadas quânticas discretas e contínuas) pode ser encontrada em².

Alguns tipos de caminhada quântica foram desenvolvidas além da contínua e da discreta com moeda. A caminhada quântica estocástica (WHITFIELD et al., 2010) determina a evolução da caminhada quântica generalizada em um grafo e engloba a caminhada aleatória clássica e a caminhada quântica como casos especiais, mas também inclui distribuições de probabilidade mais gerais.

O modelo escalonado foi introduzido em (PORTUGAL et al., 2016) e é baseado no conceito de grafo tesselado. Caminhada quântica escalonada em grafos foi analisada em (PORTUGAL, 2016b), que caracterizou 2 grafos tesseláveis. A versão com Hamiltoniano foi apresentado em (PORTUGAL et al., 2017) e uma proposta experimental usando ressonadores supercondutores foi apresentado em (MOQADAM et al., 2017). Algoritmos de busca em uma rede finita bidimensional usando o modelo escalonado com Hamiltoniano foi proposto em (PORTUGAL; FERNANDES, 2017). A conexão entre o modelo de tempo contínuo e o escalonado foi estudado em (COUTINHO; PORTUGAL, 2019) e ainda apresentou um grafo que admite uma transferência de estados perfeita em um modelo escalonado.

A caminhada quântica de Szegedy (SZEGEDY, 2004) é uma coleção de caminhadas quânticas sem moedas em tempo discreto em dígrafos bipartidos simétricos. O modelo de Szegedy é geralmente considerado a versão quantizada dessa cadeia de Markov. A conexão entre os modelos de caminhada discreta (escalonada, com moeda e de Szegedy) foi exibida em (KONNO et al., 2018; PORTUGAL, 2016a; PORTUGAL; SEGAWA, 2017). A referência (MAGNIEZ et al., 2012). A referência (ROLAND et al., 2010) propõe um algoritmo mais geral para encontrar um elemento marcado com uma aceleração quadrática. A dissertação (ITAKURA, 2005) trás uma revisão sobre o assunto.

Modelos de caminhadas quânticas com memória também foram reportados. Nestes casos, estamos lidando com uma situação onde temos cadeias não-Markovianas. Na referência (MOLFETTA et al., 2018) foi desenvolvido um tipo de caminhada conhecida como caminhada quântica do elefante. Este tipo tem um análogo clássico, chamado de caminhada aleatória do elefante (MONTEIRO, 2019). O protocolo para o primeiro passo deste modelo é semelhante ao da caminhada quântica discreta com moeda, porém, a partir do segundo passo, aplica-se um operador de translação diferente do anterior, que não só considera os estados adjacentes como também considera todos os estados que possam ter sido atingidos no passado e ambos com o

² <https://quantumalgorithmzoo.org/>

mesmo peso. O termo "elefante" advém do conceito de memória de elefante. Este modelo nos dá uma difusão hiper-balística, onde $\sigma \propto t^3$.

Além da caminhada quântica do elefante, alguns outros também podem ser encontrados na literatura (ROHDE et al., 2012; LI et al., 2020; SHIKANO et al., 2014; GETTRICK; MISZCZAK, 2014; ROHDE et al., 2013). É inegável que esta é uma área fértil e que deve ser estudada mais a fundo, realizando algoritmos de busca neste tipo de caminhada ou então adicionando desordem nestes modelos. Um livro base sobre as diferentes caminhadas é o do Prof. Renato Portugal (PORTUGAL, 2018), onde é possível encontrar em detalhes os diversos modelos de caminhadas quânticas.

2.3 TRANSIÇÃO LOCALIZAÇÃO-DESLOCALIZAÇÃO EM CAMINHADA QUÂNTICA EM TEMPO DISCRETO COM DESORDEM CORRELACIONADA DE LONGO ALCANÇE

2.3.1 Modelo e Formalismo

Neste trabalho, explorou-se a dinâmica de pacote de ondas de uma caminhada quântica em tempo discreto unidimensional embutido com correlações de longo alcance seguindo uma lei de potência codificada como desordem de fase estática *on-site* (ZENG; YONG, 2017) no operador de deslocamento. Nos cálculos, o operador é construído usando como fonte de desordem um movimento browniano fracionário com espectro de lei de potência tendo um expoente característico α que explica o grau de correlação dentro do operador unitário de deslocamento ($\alpha \geq 0$). Em particular, conta-se com a análise de escala de tamanho finito para caracterizar a transição da localização exponencial para a deslocalização do pacote de onda do caminhante.

Lidou-se com uma caminhada quântica de Hadamard em uma linha aberta. Seja H_p o espaço de Hilbert estendido pelas posições $\{|n\rangle\}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) da partícula ao longo de um espaço de moeda de dois níveis definido por H_c . Este último pode estar associado a graus internos de liberdade do caminhante, seu *spin*, $(\{\uparrow, \downarrow\})$. O espaço de Hilbert total da caminhada quântica é, portanto, $H = H_c \otimes H_p$. A evolução para um determinado estado inicial $|\psi(t=0)\rangle$ pode ser avaliada usando um operador unitário U definido como $U = S(C \otimes I)$, onde S é o operador de translação condicional incluindo desordem de fase estática *on-site*. (ZENG; YONG,

2017)

$$S = |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \sum_n (e^{2i\pi\xi_{n+1}} |n+1\rangle \langle n|) + |\downarrow\rangle \langle \downarrow| \sum_n (e^{2i\pi\xi_{n-1}} |n-1\rangle \langle n|), \quad (83)$$

com ξ_n sendo a desordem de fase e C o operador moeda,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

O estado quântico do caminhante no tempo t é dado por $|\psi(t)\rangle = \hat{U}^t |\psi(t=0)\rangle$. Neste trabalho, ξ_n assume valores obtidos de uma distribuição de desordem com correlações intrínsecas de longo alcance. Para gerar esses números, considera-se o traço do movimento browniano fracionário definido por (MOURA; LYRA, 1998a)

$$V_n = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{k^\alpha} \cos \left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k \right) \quad (85)$$

onde ϕ_k representa uma fase aleatória distribuída dentro do intervalo $[0, 2\pi]$. Enfatiza-se o fato de que a sequência $\{V_n\}$ apresenta um espectro de potência de aproximadamente $1/k^{2\alpha}$ (MOURA; LYRA, 1998a).

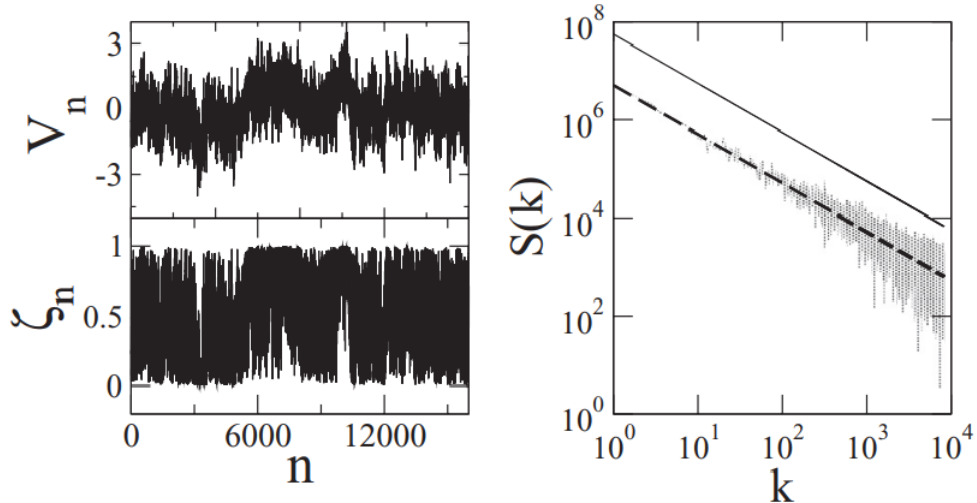
Para $\alpha = 0$ a sequência é não correlacionada. Por outro lado, $\alpha > 0$ introduz correlações de longo alcance em $\{V_n\}$. Portanto, o expoente α , em última análise, controla o grau de correlações dentro da sequência desordenada. Além disso, a partir de agora se normaliza $\{V_n\}$ de modo a $\langle V_n \rangle = 0$ e $\langle V_n^2 \rangle = 1$. Isso efetivamente modifica a força de desordem localmente, enquanto mantém a força de desordem global igual para qualquer α (SILVA et al., 2017). Com toda essa configuração, define-se $\xi_n = 0.5 \tanh(V_n) + 0.5$ para ajustar o intervalo das fases desordenadas correlacionadas dentro do intervalo $[0, 2\pi]$. É importante salientar que esta transformação não altera a função de correlação assintótica da sequência.

Na figura 10 foi ilustrado este aspecto fazendo o gráfico tanto V_n quanto ξ_n junto com suas respectivas densidades espectrais para o caso particular de $\alpha = 0.5$. Observe que ambas as séries têm um espectro de lei de potência, e o mapeamento entre elas apenas adiciona flutuações aleatórias ao decaimento $1/k$ geral. A série resultante desenvolve propriedades estatísticas distintas dependendo do valor de α . Para $\alpha < 1/2$ ele permanece estatisticamente estacionário. Para $1/2 < \alpha < 3/2$ ele gera uma dimensionalidade fracionária com o expoente de Hurst dado por $H = \alpha - 1/2$ (MANDELBROT; WALLIS, 1969). Isso implica que a série é semelhante ao traço de um movimento browniano fracionário com incrementos antipersistentes para $1/2 < \alpha < 1$ e incrementos persistentes para $1 < \alpha < 3/2$. Para grandes valores de α a série tem $H = 1$ e a desordem se torna irrelevante. A seguir, será mostrado que a dinâmica do

caminhante quântico é fortemente dependente do regime estatístico de fase aleatória.

A maioria das análises aqui feitas são sobre a propagação de pacotes de ondas

Figura 10 – Esquerda: V_n e ξ_n para uma cadeia com $N = 16.000$ sítios e $\alpha = 0.5$. A transformação restringe ξ_n ao intervalo $[0, 1]$. Direita: Densidades espectrais dos potenciais. V_n tem um espectro puro de lei de potência (linha sólida). A densidade espectral de ξ_n exibe o mesmo decaimento geral da lei de potência com flutuações aleatórias. A linha tracejada serve como guia.



Fonte: (MENDES et al., 2019)

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n [n - \langle n(t) \rangle]^2 P_n(t)} \quad (86)$$

onde $P_n(t) = |\langle \psi(t) | \uparrow, n \rangle|^2 + |\langle \psi(t) | \downarrow, n \rangle|^2$ é a probabilidade do caminhante ser encontrado no n -ésimo sítio e $\langle n(t) \rangle = \sum_n n P_n(t)$ é a posição média do caminhante. Resumindo, σ mede a largura do pacote de ondas. Esta informação permite dizer como o pacote de ondas se comporta ao longo do tempo, bem como suas propriedades de localização. Se, depois de muito tempo, $\sigma \propto N$ ($\sigma \propto \text{constante}$), isso significa um sistema deslocalizado (localizado). Além disso, $\sigma \propto t^1$ indica uma dinâmica balística com velocidade constante, enquanto $\sigma \propto t^{1/2}$ aponta para propagação difusiva. Agora, equipados com as ferramentas acima, é possível realizar uma investigação detalhada sobre a dinâmica do caminhante quântico em tempo discreto desordenado.

2.3.2 Resultados e Discussões

A seguir, serão discutidos os resultados com base em simulações numéricas da caminhada quântica desordenada. Em todas as figuras apresentadas a seguir, o estado inicial é simétrico da forma $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow, n_0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow, n_0\rangle$, com $n_0 = N/2$.

A análise começa observando o perfil da dinâmica caminhante ao variar α . Na figura 11,

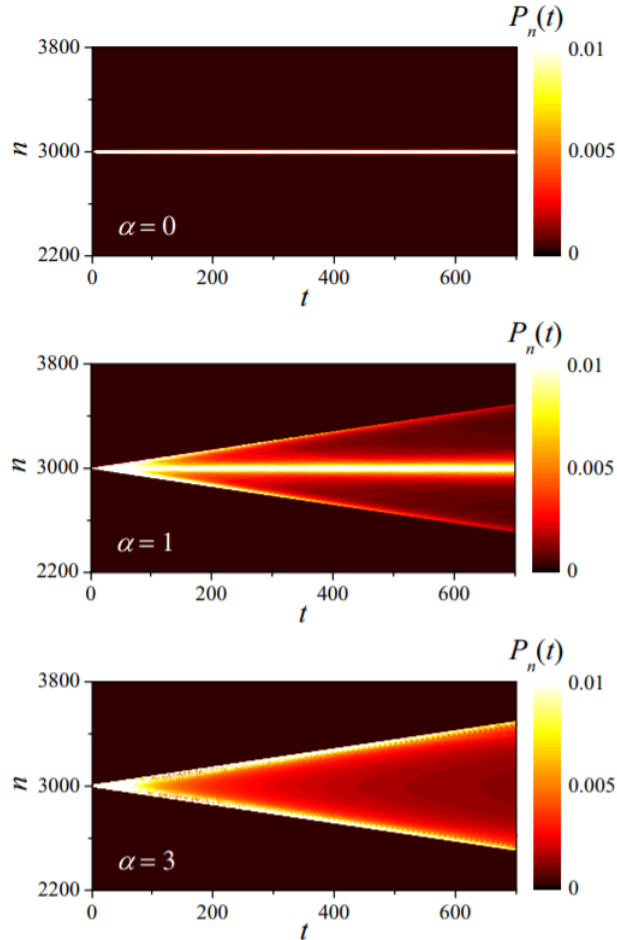
foi representado graficamente a evolução temporal de $P_n(t)$ versus n e t para $\alpha = 0, 1$ e 3 em uma cadeia aberta. Observou-se que, para $\alpha = 0$, o caminhante permanece preso em torno da posição inicial n_0 como esperado. Este caso representa uma caminhada quântica evoluindo em uma cadeia com desordem não correlacionada. Como amplamente conhecido (OBUSE; KAWAKAMI, 2011; RAKOVSKY; ASBOTH, 2015; NICOLA et al., 2014; ZHAO; GONG, 2015; VAKULCHYK et al., 2017; ZENG; YONG, 2017; SCHREIBER et al., 2011; CRESPI et al., 2013), DTQWs desordenados compartilham algumas semelhanças com a teoria de localização de Anderson padrão, o que significa que o espalhamento aleatório do pacote de ondas leva à localização exponencial do caminhante quântico. Este cenário muda quando correlações de longo alcance são adicionadas à desordem.

Para $\alpha = 1$, é possível notar que uma fração da probabilidade se espalha dentro da cadeia, enquanto outra fração finita do pacote de ondas inicial permanece presa ao redor do local inicial. Para $\alpha = 3$, o perfil de probabilidade do pacote de ondas sugere a deslocalização do caminhante quântico. É possível ver que a frente da onda avança linearmente no tempo e a fração do pacote de onda em torno da posição inicial (probabilidade de retorno) torna-se cada vez menor. Esses resultados são indícios preliminares de que a função da onda adquire um comportamento estendido.

Uma descrição mais precisa, entretanto, pode ser obtida analisando a evolução da largura do pacote de ondas em cadeias com tamanhos distintos. Na figura 12 foi feito o gráfico de $\sigma(t)$ versus t para três valores representativos de α e tamanhos de cadeia $N = 2000$ até 16000 . Em um regime de α pequeno ($\alpha = 0.25$), a largura σ é independente do tamanho e satura após um espalhamento difusivo inicial. Em um regime intermediário ($\alpha = 0.75$) a largura do pacote de ondas apresenta uma dependência de tamanho sublinear. O último painel explica o regime de α grande, representado por $\alpha = 1.5$. Neste caso, a largura assintótica do pacote de ondas escala linearmente com o tamanho do sistema após uma propagação balística inicial. O colapso de dados agora é obtido escalando a largura e o tempo linearmente com o tamanho do sistema.

Para falar mais precisamente sobre os limites de cada regime dinâmico descrito acima, é necessário voltar a atenção para o comportamento de tempo longo da largura do pacote de ondas. Considerando que o estado estatisticamente estacionário no regime balístico é alcançado para $t/N > 1$, avalia-se a largura do pacote de ondas em torno de $t = 5N$ calculando a média em 100 intervalos de tempo e 1000 configurações de desordem distintas. A Figura 13 mostra o comportamento escalonado de tempo longo da largura da função de onda do caminhante σ/N versus α . Isso dá suporte adicional à indicação acima de que a largura do pacote de onda

Figura 11 – A evolução temporal da distribuição de probabilidade do pacote de onda $P_n(t)$ versus n versus t para $\alpha = 0, 1$ e 3 em média sobre 103 realizações de desordem. Para correlações fracas ($\alpha = 0$ e 1), uma fração finita do caminhante permanece localizada em torno da posição inicial $n_0 = N/2 = 3000$. Para $\alpha = 3$, o estado adquire um comportamento semelhante a uma localização.



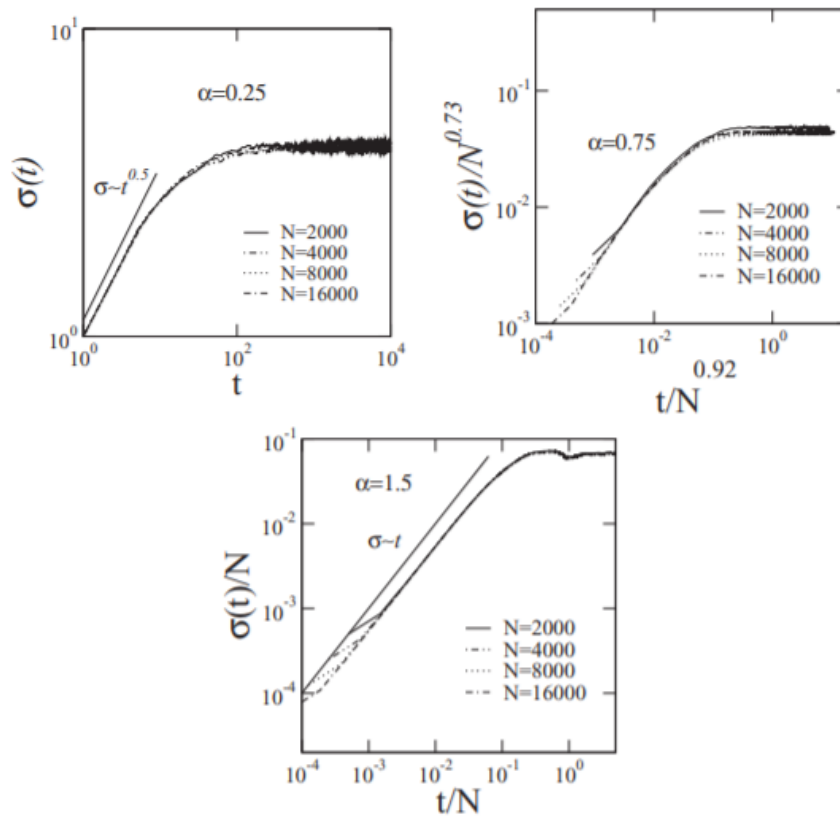
Fonte: (MENDES et al., 2019)

permanece finita para pequenos valores de α enquanto é escalonada linearmente com o tamanho do sistema para grandes valores de α .

Na figura 14, mostrou-se, em uma escala log-log, a dependência do tamanho da largura do pacote de ondas para valores de α dentro do intervalo $[0, 1.4]$ e tamanhos de cadeia variando de $N = 2000$ a $N = 16000$. É possível ver claramente que o cruzamento do regime independente de tamanho para o regime linear pode ser bem representado por um perfil intermediário no qual a largura do pacote de ondas representa uma escala de tamanho finito sublinear efetiva como $\sigma \propto N^\Sigma$, com $0 < \Sigma < 1$.

Os valores estimados do expoente efetivo Σ em função de α são representados graficamente na figura 15. Ela mostra que o regime no qual o pacote de ondas permanece totalmente localizado, ou seja, $\Sigma = 0$, persiste até $\alpha \approx 0,5$. O estado totalmente estendido, correspondendo

Figura 12 – $\sigma(t)$ versus t para $\alpha = 0.25, 0.75$ e 1.5 em média sobre 103 amostras distintas. Para $\alpha = 1.5$, a largura do pacote de ondas do caminhante exibe dinâmica balística com $\sigma \propto t$ antes de saturar devido aos efeitos de tamanho finito. O colapso de dados é obtido redimensionando a largura e o tempo linearmente pelo tamanho da cadeia. Observe que para $\alpha = 0.25$, σ é independente do tamanho. Para $\alpha = 0.75$, o colapso dos dados é visto após o reescalonamento adequado da largura e do tempo por uma potência sublinear do tamanho da cadeia.



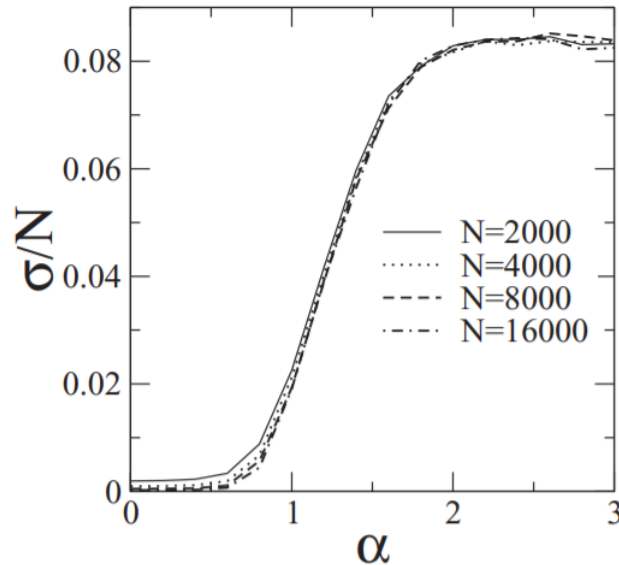
Fonte: (MENDES et al., 2019)

a $\Sigma = 1$, surge quando $\alpha > 1$. No intervalo $0.5 < \alpha < 1$, o pacote de ondas exibe uma escala de tamanho finito sublinear, sinalizando uma localização fraca.

Análise de escala adicional também pode ser realizada para outra propriedade muito relevante da dinâmica do pacote de ondas, sua probabilidade de retorno $R(t) = P_{n_0}(t)$. Na figura 16, traçou-se seu valor estatisticamente estacionário como uma função de α obtido de tamanhos de cadeia distintos. A probabilidade de retorno permanece finita para pequenos valores de α e desaparece à medida que aumenta de acordo com a transição localização-deslocalização relatada acima.

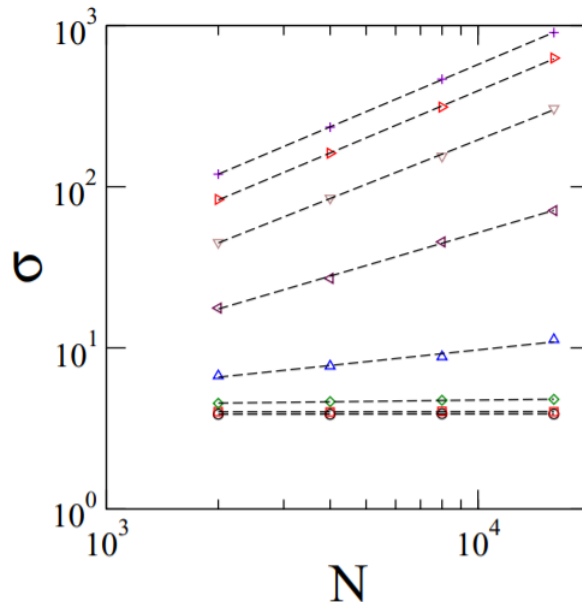
A fim de desvendar o comportamento de escala de tamanho finito da probabilidade de retorno no regime fortemente correlacionado, foi feito o gráfico de RN , bem como $RN/\ln N$ como uma função do tamanho da cadeia na figura 17. Observa-se que a variável de escala adequada é aquela que leva em conta uma correção logarítmica para a escala linear, resultando

Figura 13 – Largura de função de onda de longo tempo escalonada $\sigma(t = 5N)/N$ versus α para $N = 2000$ a 16000 em média sobre 103 amostras de desordem distintos. Observe que α/N permanece finito e independente de tamanho para α grande.



Fonte: (MENDES et al., 2019)

Figura 14 – Dependência do tamanho da largura da função de onda de longo tempo $\sigma(t = 5N)$ versus N para $\alpha = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$ (de baixo para cima). O cruzamento do regime independente de tamanho para o regime de escala linear pode ser efetivamente descrito por um comportamento de lei de potência sublinear da forma $\sigma \propto N^b$.

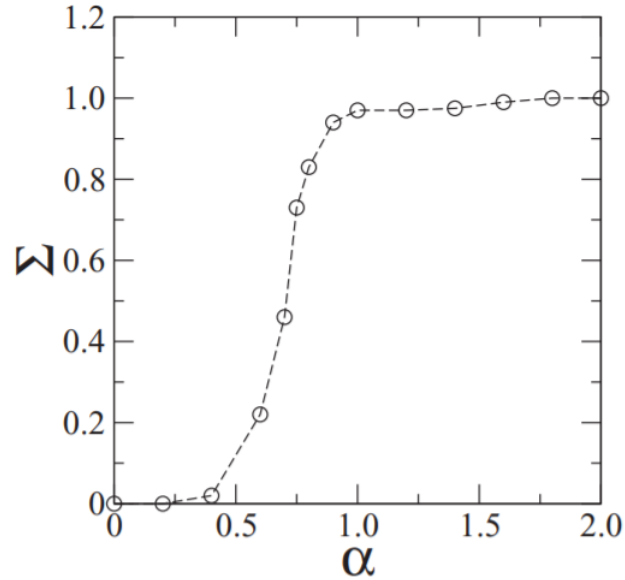


Fonte: (MENDES et al., 2019)

em um comportamento independente do tamanho. Esse mesmo resultado indica que no regime fortemente correlacionado a probabilidade de retorno assintótico decai como $R \propto \ln(N)/N$.

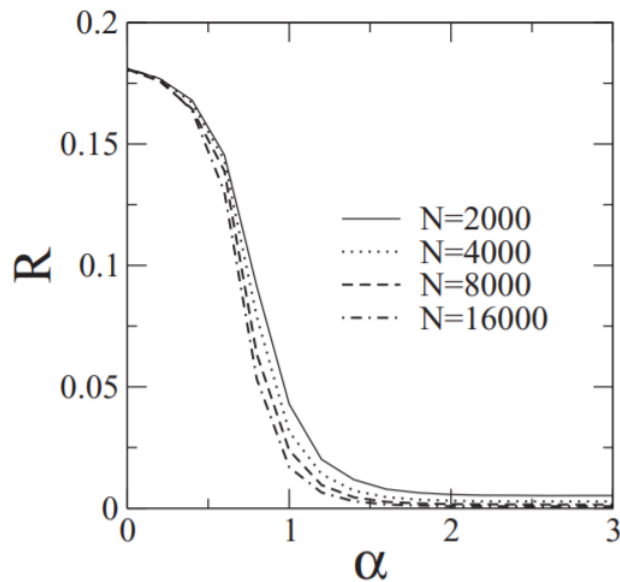
Agora, tomando $\tilde{N} = N/\ln N$ como a variável de escala (mais apropriada), foi explo-

Figura 15 – Expoente de escala de tamanho finito da largura do pacote de onda $\sigma \propto N^\Sigma$, com $\sigma = \sigma(t = 5N)$. Os expoentes da lei de potência são estimados para tamanhos $N = 2000$ a 16000 . Observa-se três regimes distintos: (1) localização completa com $\Sigma = 0$; (2) escala sublinear com $0 < \Sigma < 1$; e (3) deslocalização total com $\Sigma = 1$.



Fonte: (MENDES et al., 2019)

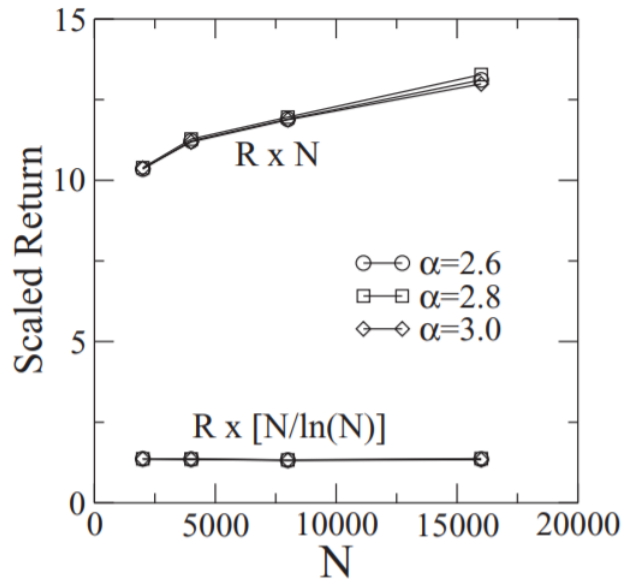
Figura 16 – Comportamento de longo prazo da probabilidade de retorno $R = P_{n_0}(t = 5N)$ versus α para $N = 2000$ a 16000 em média sobre 103 amostras de desordem distintos. Observe que a probabilidade de retorno permanece finita e não depende do tamanho do sistema para $\alpha < 1/2$.



Fonte: (MENDES et al., 2019)

rado a dependência do tamanho da probabilidade de retorno para uma ampla faixa de α . Estes resultados estão resumidos na figura 17. Observe que o cruzamento do tamanho independente

Figura 17 – Dependência do tamanho de RN e $RN/\ln N$ em função do tamanho da cadeia para valores representativos de α no regime fortemente correlacionado. A independência de tamanho de $RN/\ln N$ diz o quão relevante é essa correção logarítmica.



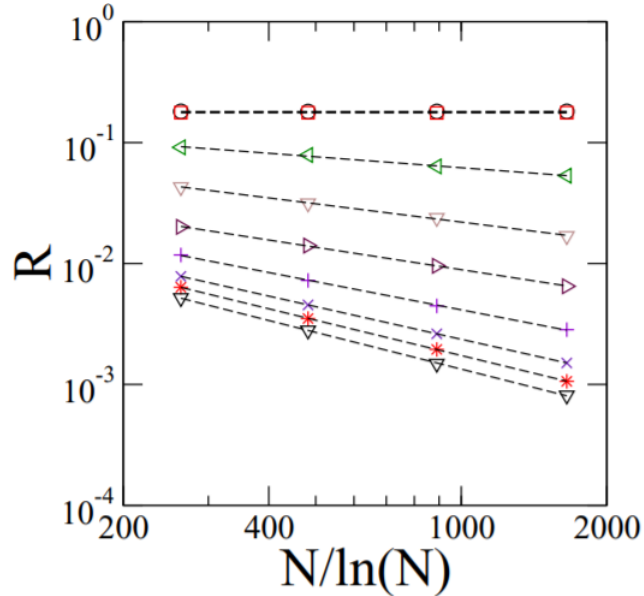
Fonte: (MENDES et al., 2019)

para o regime de escala linear (com uma correção logarítmica) também pode ser efetivamente descrito por um regime de escala de lei de potência sublinear intermediário no qual $R \propto \tilde{N}^\beta$, com $0 < \beta < 1$.

Os valores estimados para o expoente de escala β são apresentados na figura 19. No regime totalmente localizado ($\alpha < 0,5$), o expoente de escala de retorno $\beta = 0$, conforme esperado. No entanto, diferentemente do comportamento da escala linear da largura do pacote de onda σ que se desenvolve em $\alpha = 1$, a escala linear da probabilidade de retorno é alcançada apenas para valores mais altos de α .

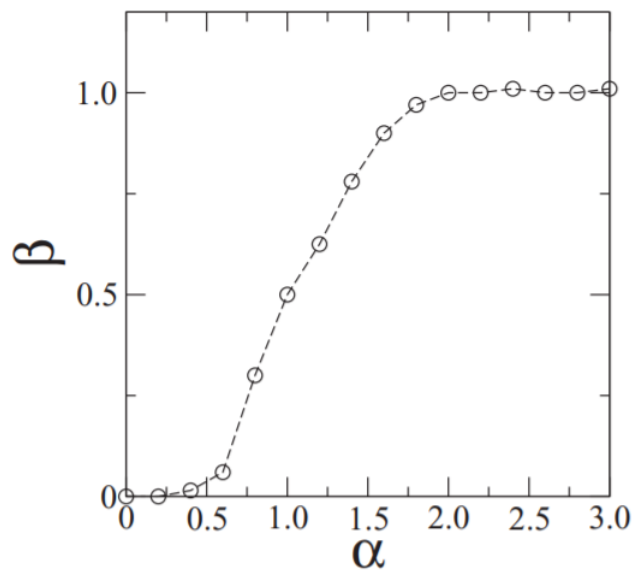
Devido à correção logarítmica intrínseca ao escalonamento da probabilidade de retorno, cálculos numéricos realizados para tamanhos de cadeia maiores seriam necessários para determinar com precisão o limite superior do regime com escalonamento de tamanho finito sublinear da probabilidade de retorno. No entanto, foi conjecturado que os limites exatos para os regimes relatados acima estão diretamente relacionados aos regimes estatísticos distintos da fase aleatória. Quando $\alpha < 1/2$ a sequência de fase é estacionária, levando à localização completa. Para sequências de fase não estacionárias com incrementos antipersistentes, $1/2\alpha < 1$, obtém-se uma localização fraca da função de onda de caminhada quântica com uma escala de tamanho finito sublinear da largura do pacote de onda. A localização também se desenvolve para sequências de fase com incrementos persistentes, $\alpha > 1$, o que leva à escala linear de $\sigma \propto N$. No

Figura 18 – Probabilidade de retorno R versus variável de escala $N/\ln N$ para $\alpha = 0, 0.2, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 3.0$ (de cima para baixo). O regime de escalonamento intermediário pode ser efetivamente representado por uma lei de potência sublinear $R \propto \tilde{N}^{-\beta}$ com $0 < \beta < 1$.



Fonte: (MENDES et al., 2019)

Figura 19 – Expoente de escala de tamanho finito da probabilidade de retorno $R \propto 1/\tilde{N}^\beta$, com $R = P_{n_0}(t = 5N)$, para $N = 2000, 4000, 8000$ e 16000 . Aqui $\tilde{N} = N/\ln N$. Para para cada α e N , calculou-se a média de $P_{n_0}(t)$ em 103 realizações distintas de desordem, foi selecionado as últimas 100 etapas antes de $t = 5N$ e, em seguida, tira-se outra média para finalmente definir R . Nota-se três regimes distintos: (1) $\beta = 0$; (2) $0 < \beta < 1$; e (3) $\beta = 1$ (sinalizando um comportamento linear com correção logarítmica). Um regime sublinear intermediário se desenvolve no intervalo $1/2 < \alpha < 3/2$.



Fonte: (MENDES et al., 2019)

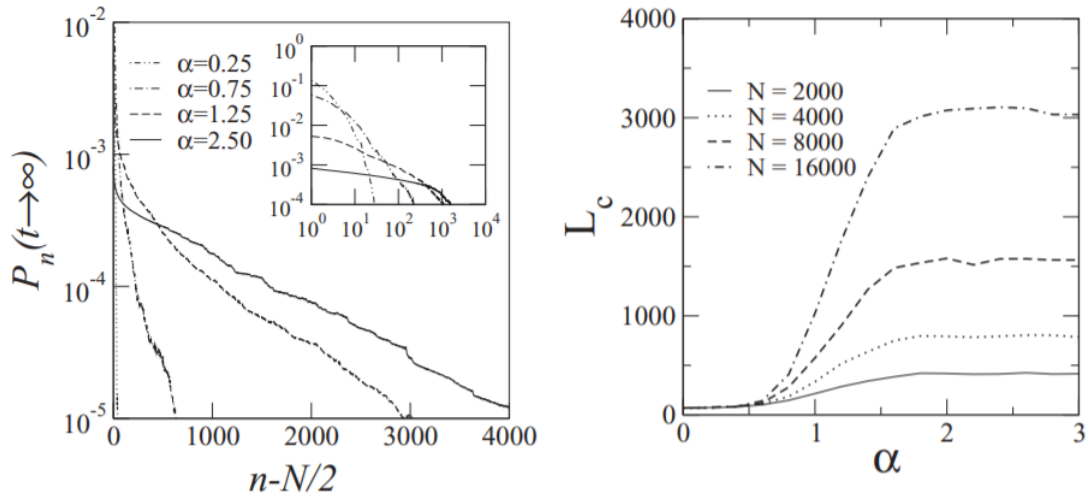
entanto, um perfil de pacote de ondas estatisticamente estacionário aproximadamente uniforme é alcançado apenas quando o caráter fractal da paisagem de fase subjacente é perdido, o que torna a desordem irrelevante. Este é o caso de $\alpha > 3/2$, com o que a probabilidade de retorno varia quase linearmente com o tamanho da cadeia. O ligeiro desvio da escala linear perto de $\alpha = 3/2$ sugere que tamanhos de cadeia muito maiores seriam necessários para capturar com precisão a escala assintótica na vizinhança deste ponto.

Por último, a fim de aprofundar a compreensão dos vários cenários revelados pelo comportamento de escala de tamanho finito, foi traçado o perfil do pacote de ondas após um grande número de etapas no painel à esquerda na figura 20 para alguns valores representativos de α . Para pequeno grau de correlações ($\alpha < 1/2$), o pacote de ondas permanece fortemente localizado em torno da posição inicial. Acima desse valor, o pacote de ondas desenvolve um comportamento de lei de potência de decadência lenta interrompido por um corte exponencial. Em seguida, o pacote de ondas obtém um perfil plano para $\alpha > 3/2$ - apresentando um decaimento muito lento seguida pelo *cutoff* - atingindo, assim, o regime de deslocamento final. Nesse caso, $\sigma \propto N$ enquanto $R \propto \ln N/N$. No painel à direita na figura 20, exibimos o comprimento de *cutoff* L_c contra α para vários N . O *cutoff* é estimado como a distância até a posição inicial na qual a função de onda estatisticamente estacionária torna-se menor que 10^{-30} . Para $\alpha < 1/2$, o *cutoff* é independente do tamanho, enquanto atinge um platô para $\alpha > 3/2$ em que $L_c \propto N$.

2.3.3 Considerações Finais

Neste trabalho, desvendou-se a dinâmica de um DTQW desordenado apresentando correlações de longo alcance controladas por um único parâmetro, α , exibindo um espectro de lei de potência da forma $1/k^{2\alpha}$. Os resultados mostraram que a dinâmica balística é mantida na presença de desordem, desde que o grau de correlações seja alto o suficiente. Quatro regimes distintos foram identificados a partir da análise de escala de tamanho finito da largura do pacote de ondas σ e da probabilidade de retorno. A localização forte persiste para $\sigma < 1/2$, quando a fase aleatória é estacionária. O regime usual de deslocalização quase uniforme se estabelece para $\alpha > 3/2$ refletindo o aspecto não fractal da distribuição de fase. Também foi identificada a existência de dois regimes intermediários nos quais o pacote de ondas desenvolve uma cauda de lei de potência que decai lentamente. Sempre que a fase aleatória possui incrementos antipersistentes ($1/2 < \alpha < 1$), o caminhante quântico apresenta fraca deslocalização, com σ escalando sublinearmente com o tamanho da cadeia. Para sequências de fase não estacionárias com incrementos persistentes ($1 < \sigma < 3/2$), σ se estende por uma fração finita da cadeia,

Figura 20 – Esquerda: Perfil de pacote de onda de longa duração para alguns valores representativos do expoente de correlação α . A probabilidade de ocupação local P_n foi avaliada em $t = 5N$ com $N = 16000$. O painel principal mostra o desenvolvimento de uma cauda exponencial enquanto a inserção enfatiza o decaimento da lei de potência em valores intermediários de α antes do corte exponencial. Direita: comprimento de corte L_c versus α para vários tamanhos N em média sobre 103 realizações distintas de desordem. Embora o corte seja independente do tamanho para $\alpha < 1/2$, ele é dimensionado linearmente com o tamanho do sistema para $\alpha > 3/2$.



Fonte: (MENDES et al., 2019)

embora a probabilidade de retorno ainda seja sublinear.

Este trabalho se baseia no impacto das transições de localização e deslocalização do Anderson em DTQWs. Caminhadas quânticas são plataformas convenientes para simulação quântica (CHANDRASHEKAR, 2006; NICOLA et al., 2014; SCHREIBER et al., 2011; CRESPI et al., 2013), e o papel de diferentes tipos de ruído deve ser levado em consideração, como aqueles capazes de conduzir a uma quebra de localização de Anderson (MOURA; LYRA, 1998a). A interação entre a dinâmica localizada e deslocalizada também pode ser muito útil no domínio dos protocolos de comunicação quântica (ALMEIDA et al., 2017; ALMEIDA et al., 2018).

Outras extensões deste trabalho podem ser realizadas considerando os efeitos da desordem da moeda (CHANDRASHEKAR, 2006) e a relação geral entre as propriedades de localização e as fases topológicas (RAKOVSKY; ASBOTH, 2015). Outra direção pode ser tomada para estudar a dinâmica da caminhada quântica de muitas partículas (SANSONI et al., 2012) contra desordem correlacionada.

2.4 PROPRIEDADES DE LOCALIZAÇÃO DE UMA CAMINHADA QUÂNTICA 1D EM TEMPO DISCRETO COM DESORDEM CORRELACIONADO DO TIPO EXPONENCIAL GENERALIZADO

2.4.1 Modelo e Formalismo

Neste trabalho, foi estudado como a interação entre os desvios da Gaussianidade e o comprimento de correlação afeta a dinâmica de um DTQW Hadamard em uma linha.

Os dois ingredientes principais para configurar um DTQW em uma matriz 1D são: O espaço de moeda (*qubit*) H_C medido por $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ e o conjunto H_P para os estados de posição $\{|n\rangle\}$ ($n = 1, 2, \dots, N$), de forma que o espaço de Hilbert total seja $H = H_C \otimes H_P$ (KEMPE, 2003). Agora precisa-se de alguns operadores para agir sobre esses estados, um dos quais deve realizar a etapa de "lançamento da moeda". Para isso, consideramos a moeda Hadamard,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (87)$$

atuando unicamente no estado da moeda H_C . O próximo procedimento é o chamado deslocamento condicional S que move o caminhante para um lado ou para o outro dependendo do seu estado interno, ou seja, $S|\uparrow\rangle|n\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle|n+1\rangle$ e $S|\downarrow\rangle|n\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle|n-1\rangle$. Seguindo a referência (ZENG; YONG, 2017), adiciona-se uma desordem de fase nestes deslocamentos, de modo que

$$S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \sum_n (e^{i2\pi\phi_{n+1}} |n+1\rangle\langle n|) + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \sum_n (e^{i2\pi\phi_{n+1}} |n-1\rangle\langle n|), \quad (88)$$

onde ϕ_n é uma fase desordenada. Juntando todos estes elementos, a DTQW é incorporada por um operador unitário $U = S(C \otimes I)$ atuando em $|\psi(t=0)\rangle$ várias vezes, até o t -ésimo passo, $|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle$.

É feito agora algumas considerações sobre o tipo de desordem que está sendo lidado neste trabalho. Em vez de atribuir uma distribuição de desordem aleatória padrão (não correlacionada) para ϕ_n - como feito em (ZENG; YONG, 2017), onde foi mostrado que a localização cria uma desordem estática forte - abordou-se um tipo especial de flutuações correlacionadas, a desordem correlacionada do tipo exponencial generalizada, gerada a partir de

$$V_n = \sum_{m=1}^N \eta_m \exp[-(|n-m|/\xi)^\alpha], \quad (89)$$

onde η_m representa uma fase aleatória distribuída no intervalo $[-0.5, 0.5]$ (gerado independentemente para cada amostra) e $\{\alpha, \xi\}$ controla os graus de correlação. O parâmetro α controla o grau de não-Gaussianidade na distribuição de desordem. Para $\alpha = 0$, não há desordem. Correlações gaussianas correspondem a $\alpha = 2$ e o caso particular de $\alpha = 1$ explica correlações com

decaimento exponencial, onde ξ acaba sendo o comprimento de correlação padrão (SALES; de Moura, 2012). No caso limite em que $\xi = 0$ chega-se a uma distribuição de desordem totalmente não correlacionada.

Agora se normaliza $\{V_n\}$ de modo a $\langle V_n \rangle = 0$ e $\langle V_n^2 \rangle = 1$, mantendo as propriedades de desordem, independentemente do tamanho do sistema N . Define-se $\phi_n = 0.5 \tanh(V_n) + 0.5$ para manter seu alcance dentro do intervalo $[0, 1]$ de modo que as fases no operador de deslocamento fiquem entre 0 e 2π . Vale salientar que esta transformação de V_n para ϕ_n não afeta o perfil de correlação embutido na distribuição de desordem. Para ter uma visão melhor sobre a fase resultante, na figura (21) foi mostrado algumas amostras típicas da sequência $\{\phi_n\}$ para vários valores de ξ e α e $N = 10000$. Na mesma figura (painéis inferiores), foi feito o gráfico das funções de autocorrelação correspondentes, definidas como

$$C(r) = \frac{1}{N-r} \sum_{n=1}^{N-r} [(\phi_n \phi_{n+r}) - \langle \phi_n \rangle^2], \quad (90)$$

nele, vê-se claramente o papel dos parâmetros ξ e α . O primeiro atua suavizando as flutuações, o que aumenta o grau de correlações dentro da distribuição de desordem. Isso resulta em um declínio mais lento da função de autocorrelação com a distância r . Agora, mantendo-se ξ fixo, o comportamento de α é muito mais sutil. Depende fortemente de ξ e N de uma forma que pode conter a queda da função de correlação para r mais longo ou empurrá-la de forma mais crítica (ver Fig. 21; compare os resultados para $\xi = 1$ e $\xi = 1000$ em particular). Mais tarde, será mostrado que, em última análise, isso depende da proporção ξ/N .

Ao longo deste artigo, a análise é amplamente construída sob a propagação do pacote de ondas (desvio padrão)

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n (n - \langle n(t) \rangle)^2 P_n(t)} \quad (91)$$

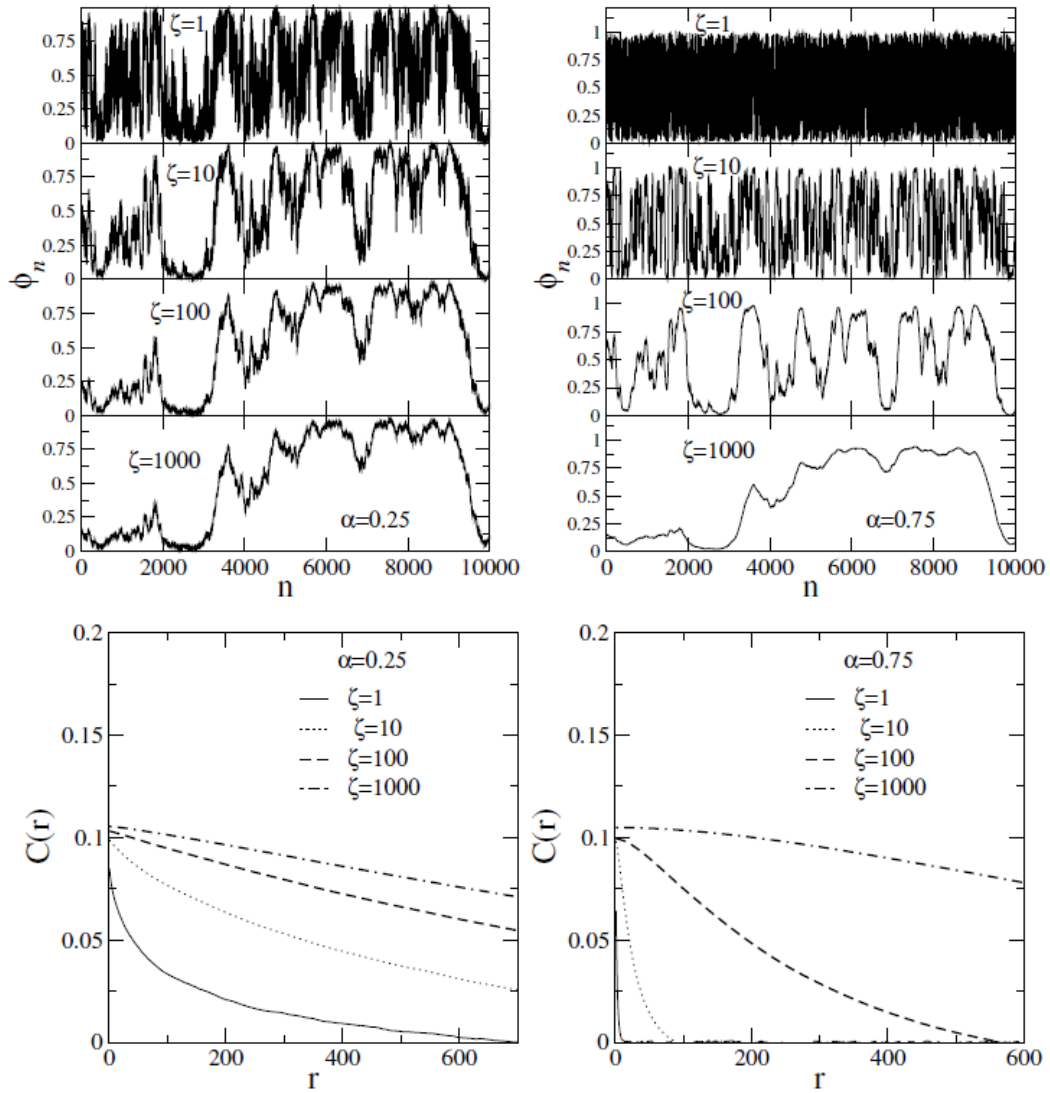
onde $P(t) = |\langle \psi(t) | \uparrow, n \rangle|^2 + |\langle \psi(t) | \downarrow, n \rangle|^2$ é a probabilidade de ocupação do caminhante no n -ésimo sítio e $\langle n(t) \rangle = \sum_n n P_n(t)$ é a posição média.

2.4.2 Resultados e Discussão

Nesta seção, exibe-se e discute os resultados numéricos para o DTQW desordenado apresentando correlações exponenciais generalizadas apontados anteriormente. O estado inicial é localizado (e simétrico em relação à moeda) no meio da cadeia em $n_0 = N/2$ tendo a forma

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow, n_0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow, n_0\rangle, \quad (92)$$

Figura 21 – Topo: ϕ para uma cadeia com $N = 10000$ sítios para $\alpha = 0.25, 0.75$ e $\xi = 1, 10, 100, 1000$. Abaixo: funções de autocorrelação média geradas por $C(r) = \left[1/(N - r) \sum_{n=1}^{N-r} [(\phi_n \phi_{n+r}) - \langle \phi_n \rangle^2] \right]$ com 30 amostras independentes, versus r .

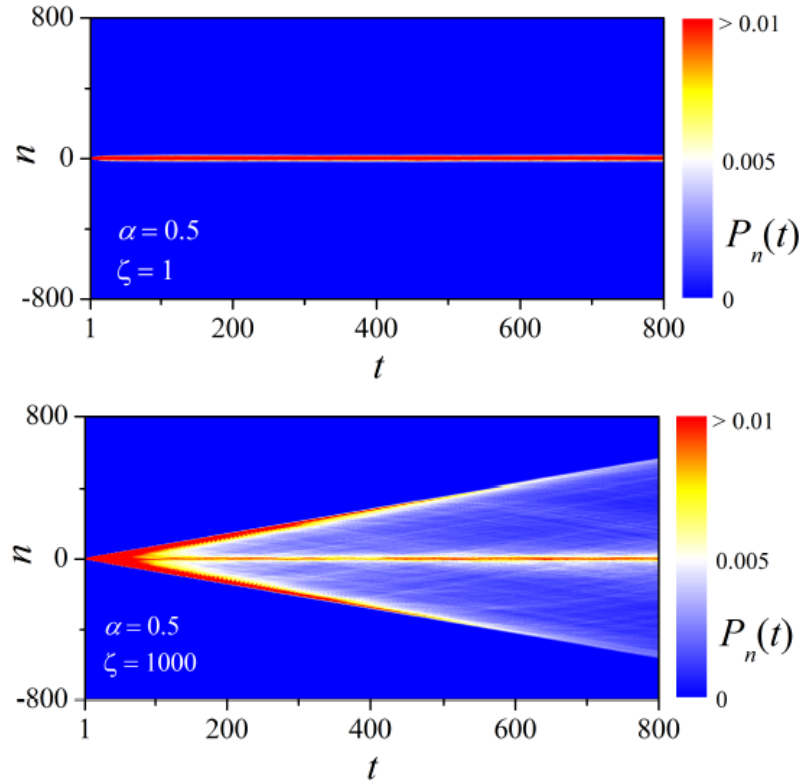


Fonte: (MENDES et al., 2021)

para todas as simulações abaixo. Além disso, para cada quantidade que foi feito o gráfico foi calculada a média em cima de 1000 realizações independentes de desordem, a menos que seja indicado de outra forma.

Primeiro mostra-se o perfil geral da evolução do tempo do caminhante na figura 22, onde é exibido o diagrama espaço-tempo para $P_n(t)$ para um valor representativo de comprimento de correlações representando desordem correlacionada de curto e longo alcance. Observa-se claramente que para desordem correlacionado de curto alcance ($\xi = 1$), o caminhante permanece totalmente localizado em torno de sua posição inicial. Isso deve vir sem surpresa, já que as correlações são efetivamente baixas e os DTQWs desordenados compartilham algumas seme-

Figura 22 – Evolução temporal da probabilidade de ocupação $P_n(t)$ versus n para $\alpha = 0.5$ e $\xi = 1$ (painel superior) e $\xi = 1000$ (painel inferior). Observe que o caminhante permanece totalmente localizado para correlações de curto alcance, enquanto uma parte significativa dele se espalha no caso de desordem correlacionada de longo alcance.



Fonte: (MENDES et al., 2021)

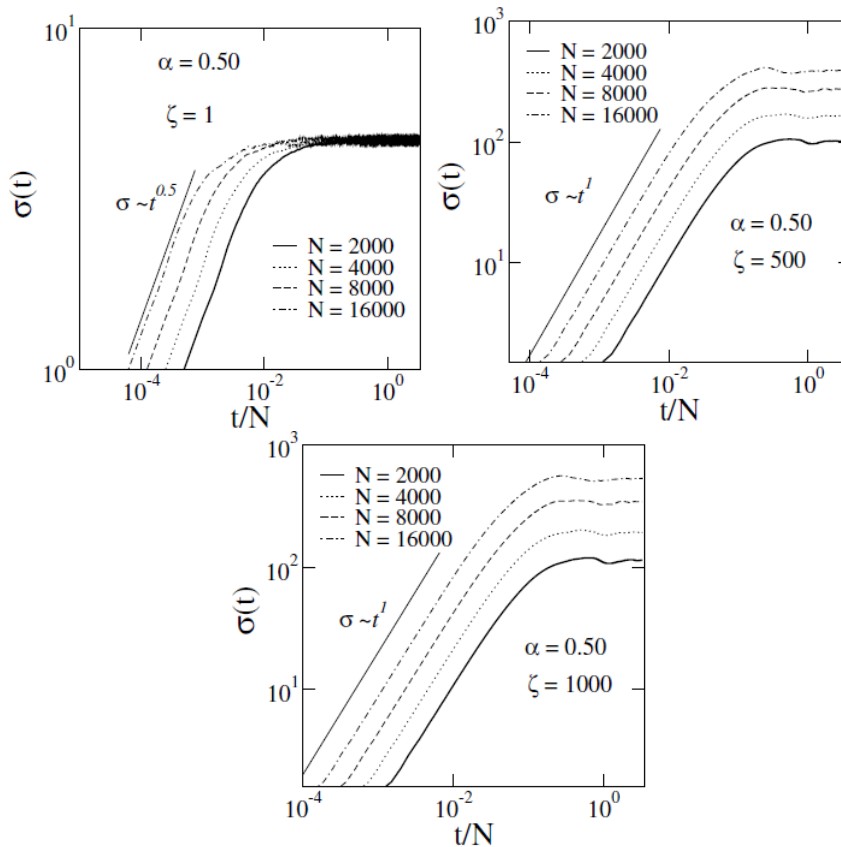
lhanças com a teoria de localização de Anderson (OBUSE; KAWAKAMI, 2011; RAKOVSKY; ASBOTH, 2015; WÓJCIK et al., 2012; ZENG; YONG, 2017). Para desordem correlacionada de longo alcance ($\xi = 1000$), identifica-se uma parte significativa da amplitude de probabilidade saindo de n_0 , enquanto uma fração finita do pacote inicial ainda é retida em torno do local inicial. Essa é outra característica da natureza localizada do caminhante quântico.

Em seguida, avança-se para uma descrição mais precisa das propriedades de localização do sistema, analisando $\sigma(t)$ em cadeias com tamanhos diferentes. Na figuras 23, foi representado a evolução temporal do desvio padrão $\sigma(t)$ versus t/N para $N = 2000$ até 16000. Para correlações de curto alcance ($\xi = 1$), a largura do pacote de ondas exibe um espalhamento difusivo inicial com $\sigma \propto t^{1/2}$. Isso indica que a propagação inicial já é fortemente influenciada pela desordem. Em tempos longos, a largura do pacote de onda satura em um valor finito independente de tamanho sinalizando a localização de Anderson. Para desordem correlacionada de longo alcance ($\xi = 500$ e 1000), a propagação inicial torna-se balística. Isso indica que essa propagação inicial não é afetada pela desordem e, portanto, a propagação do pacote de ondas torna-se semelhante

àquela que ocorre em um DTQW sem desordem. Nesse caso, a saturação da largura do pacote de ondas em $t \approx N$ ocorre devido aos efeitos de tamanho finito. Também é possível identificar, a partir da Eq.(89), que levando ao limite $\xi \rightarrow \infty$ fica-se com $V_n = \sum_m \eta_m$, o que significa que todas as fases no operador de deslocamento, Eq.(88), é o mesmo para cada n .

O comportamento para tempo longo de σ e sua dependência com α e ξ exige uma análise

Figura 23 – Desvio padrão $\sigma(t)$ versus t/N para $\xi = 1$ até $\xi = 1000$, $\alpha = 0.5$ e $N = 2000$ até 16000.



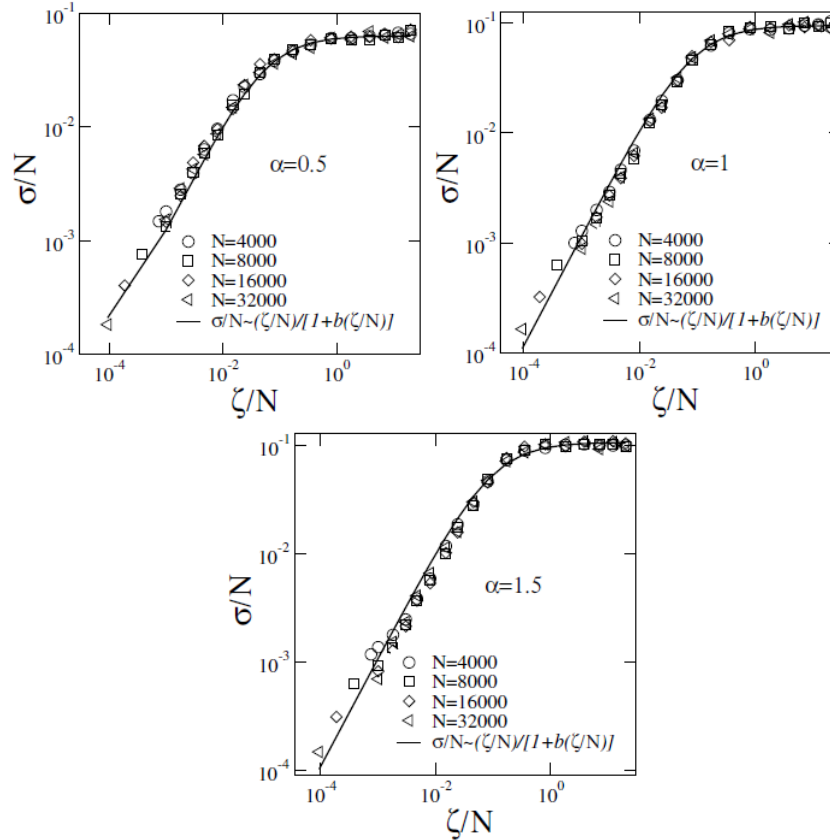
Fonte: (MENDES et al., 2021)

mais detalhada. Na figura 24, foi fornecido resultados para a largura do pacote de ondas no limite assintótico, isto é, $\sigma = \sigma(t \rightarrow \infty)$ versus ξ para vários valores de α . Para melhorar a análise, foi traçado $\sigma(t \rightarrow \infty)/N$ versus o comprimento de correlação escalado ξ/N . Os cálculos foram feitos para $N = 2000$ até 16000 e $\alpha = 0.5, 1, 1.5$. Observa-se que, independente de α , a largura da função de onda σ é proporcional a $(\xi/N)/[1 + b(\xi/N)]$, sendo b um parâmetro de t . Portanto, para $\xi/N \ll 1$ a propagação é proporcional a ξ , o que significa que se o comprimento de correlação for muito menor do que o tamanho da cadeia, ele ditará o comprimento de localização típico. Para $\xi > N$ os resultados indicam que o $\sigma(t \rightarrow \infty)/N$ é quase constante. Isso revela que o pacote de ondas se espalhará por toda a cadeia quando o comprimento de correlação típica se tornar muito maior do que o tamanho da cadeia, sendo a largura proporcional ao tamanho da

cadeia.

Para buscar mais detalhes, na figura 25 foi feito o gráfico da largura da função de onda em

Figura 24 – Propagação escalonada da função de onda de longo tempo $\sigma/N = \sigma(t \rightarrow \infty)/N$ versus ξ/N para $N = 4000$ até 32000 e $\alpha = 0.5, 1, 1.5$.

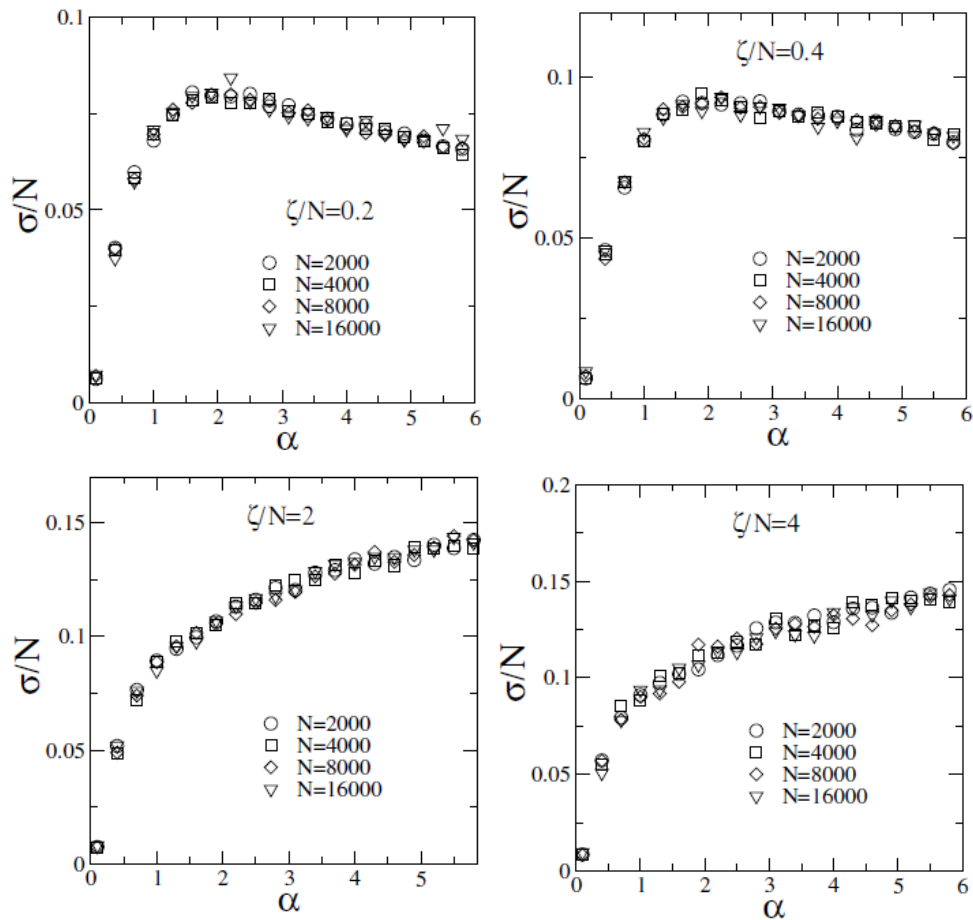


Fonte: (MENDES et al., 2021)

escala versus α para $\xi/N = 0.2$ até 4 . Agora vê-se que os regimes de desordens correlacionadas de longo e curto alcance apresentam tendências bastante distintas. Para $\xi > N$, observamos que a largura da escala do caminhante aumenta monotonicamente à medida que α aumenta. Por outro lado, σ/N atinge um máximo em torno de $\alpha \approx 2$ quando $\xi < N$. Isso indica que, no regime de comprimentos de correlações finitas (menores que o tamanho da cadeia), as correlações gaussianas na distribuição da desordem permitem o espalhamento máximo do pacote de ondas, sinalizando assim a condição de enfraquecimento máximo da localização de Anderson.

A fim de entender melhor o comportamento curioso em torno de $\alpha = 2$, é necessário fazer uma análise estatística sobre a distribuição da desordem. Tomando séries de incrementos de ϕ_n definido como $\theta_n = \phi_n - \phi_{n-1}$, tem-se que $\{\theta_n\}$ contém $N - 1$ termos. Em seguida, divide-se em s segmentos de tamanho ξ , tendo um total de segmentos $N_s = N/\xi$. Calcula-se a variação dentro de cada segmento como $\Delta_s = \sqrt{\langle \theta_n^2 \rangle_s - \langle \theta_n \rangle_s^2}$ onde $\langle \cdot \rangle_s$ representa a média dentro do segmento s . A variância local média dos incrementos é finalmente dada por $\Delta = \sum_{s=1}^{N/\xi} \Delta_s / N_s$.

Figura 25 – Propagação escalonada da função de onda de longo tempo $\sigma/N = \sigma(t \rightarrow \infty)/N$ versus α para $\xi/N = 0.2$ até 4 e $N = 2000$ até 16000.



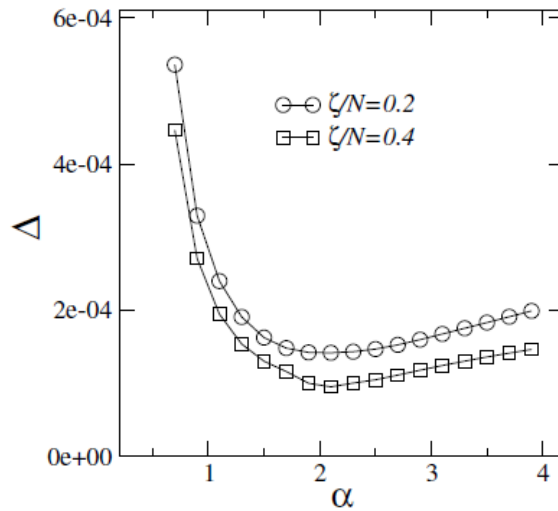
Fonte: (MENDES et al., 2021)

Na figura 25 foi feito o gráfico de Δ (média de 20 amostras independentes) versus α e observa-se que, à medida que α se aproxima de $\alpha = 2$, a variância local diminui, sugerindo que as flutuações de fase são mais suaves naquela região, o que explica a tendência vista na figura 24 para $\xi < N$.

2.4.3 Considerações Finais

Neste trabalho, estudou-se a dinâmica de um DTQW desordenado caracterizado por uma desordem de fase correlacionado tipo exponencial generalizado controlado por dois parâmetros, o expoente de generalização α e o comprimento de correlação generalizada ξ . Mostrou-se que, para $\xi \ll N$, o caminhante permanece preso em torno da posição $n_0 = N/2$ após um espalhamento difusivo inicial, independente do valor de α . Por outro lado, para $\xi \gg N$ o caminhante se desloca balisticamente. Nesse regime, o aumento de α leva a um crescimento monotônico da largura do pacote de ondas. Porém, quando o comprimento de correlação ξ é menor que o tamanho do sistema N , a largura de saturação do pacote de ondas varia de forma não monotônica com α ,

Figura 26 – Variância local média $\Delta = \sum_{s=1}^{N/\xi} \Delta_s / N_s$ versus α sob s seguimentos $\Delta_s = \sqrt{\langle \theta_n^2 \rangle_s - \langle \theta_n \rangle_s^2}$, onde $\theta_n = \theta_n - \theta_{n-1}$ e $N_s = N/\xi$. Visto é o resultado de uma média realizada em mais de 20 realizações de desordens independentes para $\xi/N = 0.2, 0.4$, com $N = 10000$.



Fonte: (MENDES et al., 2021)

atingindo o máximo para $\alpha \approx 2$, decaindo lentamente para valores maiores de α . Vale ressaltar que $\alpha = 2$ acarreta correlações gaussianas. Ao avaliar a variância local média sobre segmentos dimensionados pelo comprimento de correlação generalizado, mostrou-se que a suavização deve ocorrer sobre as flutuações de fase nas proximidades de $\alpha = 2$.

Os experimentos que tratam da transição de deslocalização induzida por desordem correlacionadas de longo alcance propuseram maneiras de manipular correlações dentro de configurações desordenadas (KUHL et al., 2000). Esforços em linhas semelhantes devem trazer suporte valioso para as previsões teóricas sobre a dinâmica da caminhada quântica em tempo discreto em regimes de desordem distintos.

3 Transferência de Estados Quânticos

3.1 INTRODUÇÃO

Atualmente, dados confidenciais são criptografados e enviados, em geral, através de cabos de fibra óptica em conjunto com as chaves digitais necessárias para decodificar as informações. Tanto os dados, quanto as chaves são enviados como *bits*, que nada mais são que fluxo de pulsos ópticos ou elétricos representando 1 ou 0. Devido a isso, as comunicações ficam comprometidas podendo sofrer ataques hackers que são capazes de copiar os *bits* sem deixar rastros.

Surge assim, a necessidade de um tipo de comunicação no qual a informação não possa ser copiada por ninguém que não tenha a chave de acesso. Uma alternativa para este modelo está sendo desenvolvida, a comunicação quântica. A comunicação quântica é o ato de transferir um estado quântico de um lugar para o outro. Uma das aplicações mais conhecidas desta área é a de distribuição de chaves quânticas, através do qual, uma chave aleatória e secreta pode ser estabelecida entre partes distantes sem risco de serem clonadas (BENNETT; BRASSARD, 2014; EKERT, 1991). O melhor candidato para realizar esta tarefa são os fótons, uma vez que eles conseguem realizar viagens de longa distância através de fibras ópticas e podem ser facilmente medidos pela parte receptora.

Cada vez mais, porém, vem crescendo a importância da comunicação quântica para outras áreas da computação quântica. Um exemplo disso é o grande interesse que vem em compreender o tema para realizar uma conexão entre processadores quânticos ou para fazer um computador quântico cada vez mais poderoso (KIELPINSKI et al., 2002; BLINOV et al., 2004; SKINNER et al., 2003). Como a distância para transferência das informações entre os elementos de um computador quântico são muito curtas, é muito útil termos alternativas para os fótons (KIELPINSKI et al., 2002; SKINNER et al., 2003). Baseado nisso, foi desenvolvido diversas alternativas onde a transferência do estado quântico é realizada puramente através da evolução da dinâmica natural de uma cadeia permanentemente acoplada de sistemas quânticos, sendo o primeiro desenvolvido por Bose (BOSE, 2003).

Na mecânica quântica, os *spins* são sistemas dotados de minúsculos momentos magnéticos quantizados, onde, em muitas vezes, os materiais têm uma grande coleção de *spins* permanentemente acoplados uns aos outros. As interações mútuas destes *spins* fazem preferir o alinhamento ou o anti-alinhamento, resultando em diversos fenômenos, tais como o ferromagnetismo e o anti-ferromagnetismo. Uma cadeia de *spins* modela uma grande classe de materiais em que, apesar de acoplados, a força de interação entre os *spins* diminui com a distância. Uma

forma comum do Hamiltoniano para interação entre o i -ésimo e o j -ésimo *spin* é dada por

$$H_{i,j} = J_{i,j} S_i \cdot S_j, \quad (93)$$

onde $S_i \cdot S_j = S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z$ e S_i^x, S_i^y, S_i^z são as componentes do operador de i -ésimo *spin* ao longo da direção z . Em particular, quando todos os *spins* são do tipo *spin* 1/2, S_i^x, S_i^y, S_i^z se tornam as matrizes de Pauli σ^x, σ^y e σ^z . Um Hamiltoniano da forma da Eq.(93) é denominado uma interação de troca magnética porque pode surgir quando as funções de onda dos íons se sobrepõe, ou seja, quando estão próximos uns dos outros em um metal. Em particular o Hamiltoniano especificado na Eq.(93) é chamado de interação de troca isotrópica e, além deste, também encontra-se uma variante do mesmo,

$$H_{ij}^{XY} = J_{ij} (S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y), \quad (94)$$

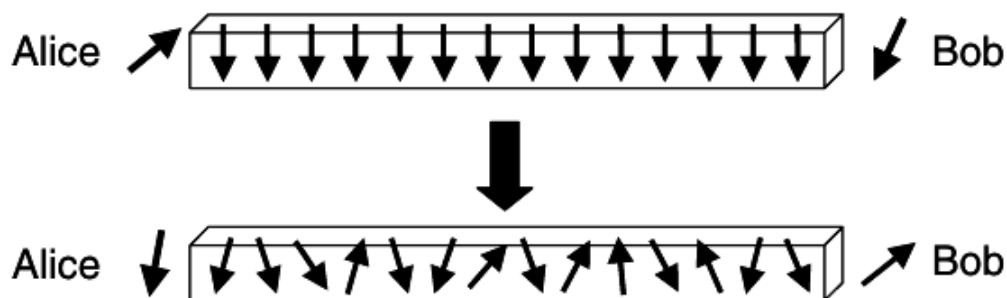
que é chamado de interação XY.

Aqui, as atenções estarão focadas em cadeias de sistemas de *spins*-1/2, porém, existem exemplos de outros sistemas na natureza, com outros tipos de *qubits* (ROMITO et al., 2005; LYAKHOV; BRUDER, 2005; LYAKHOV; BRUDER, 2006) e que não serão abordadas nesta tese.

Será fornecido agora algumas motivações para o estudo da comunicação quântica através de uma cadeia de *spins*, distintas ao objetivo simples de conectar registros quânticos. Suponha que um conjunto linear de *qubits* tenha sido fabricado para funcionar como um computador quântico. Precisa-se então verificar se cada *qubit* é capaz de permanecer em uma superposição quântica de dois estados distintos por um tempo maior do que o necessário ou executando um algoritmo quântico inteiro no computador. Em outras palavras, precisamos saber o tempo de decoerência destes *qubits*.

A estratégia mais simples seria a de analisar cada *qubit* individualmente, entretanto, caso o conjunto de *qubits* seja muito grande, tal processo se tornaria muito demorado. Uma maneira mais fácil é testar a capacidade do conjunto para se comportar como um canal de comunicação quântica. Coloque um estado conhecido em uma das extremidades (pode-se imaginar um conjunto de *qubits* organizados em uma linha), interrompa as interações de cada *qubit* de modo que o conjunto de *qubits* seja semelhante ao de uma cadeia de *spins* com interações de primeiros vizinhos. Depois, observe o quão bem o estado foi recuperado na outra extremidade do conjunto. Devido ao fato de que o estado quântico precisa passar por todos os *qubits* intermediários para então ser transmitido de uma extremidade para a outra, se houver uma decoerência em algum

Figura 27 – Protocolo de comunicação quântica. Inicialmente, a cadeia de *spin* está em seu estado fundamental em um campo magnético externo. Alice e Bob estão em extremos opostos da cadeia. Alice situa o estado quântico que deseja comunicar no *spin* mais próximo a ela. Depois de um tempo, Bob recebe esse estado com alguma fidelidade no *spin* mais próximo a ele.



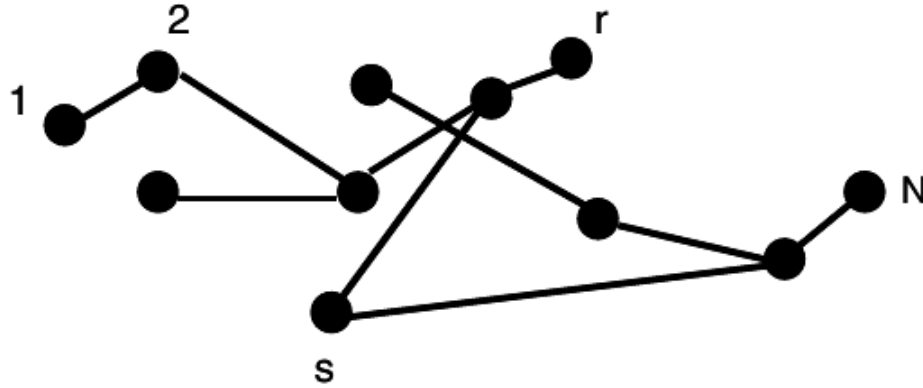
Fonte: (BOSE, 2003)

dos *qubits*, a qualidade da transmissão do estado será afetada. Assim, a comunicação quântica através de um conjunto de *qubits* pode servir como um teste de qualidade de todo o conjunto, apenas analisando os *qubits* das extremidades.

O protocolo de comunicação quântica de *spin* mais simples e que se pode prever e analisar o desempenho foi criado por Bose (BOSE, 2003). A cadeia de *spin* é composta de *spins*-1/2, de modo que os operadores S_x , S_y e S_z podem ser substituídos pelas matrizes de Pauli σ_x , σ_y e σ_z . Além disso, o protocolo é iniciado com cada elemento da cadeia de *spins* no mesmo estado puro, por exemplo, $|0\rangle$. Teremos que escolher os acoplamentos J_{ij} na Eq.(93) de tal forma que a inicialização da cadeia de *spin* seja fácil. Assim, escolhe-se $J_{i,j} < 0$, o que significa que a cadeia de *spin* descreve um ferromagnético. O estado fundamental de um ferromagnético na presença de um campo magnético fraco é aquele em que todos os *spins* apontam na direção do campo. Por exemplo, todas os *spins* poderiam estar apontando para baixo.

No protocolo de comunicação quântica, Alice coloca um estado quântico arbitrário em uma das extremidades da cadeia. Isso é descrito na figura 27, onde Alice colocou um estado arbitrário no primeiro *spin* da cadeia, enquanto todos os outros *spins* ainda estão no estado para baixo. Devido à evolução natural da cadeia, este estado se dispersa e se propaga ao longo da cadeia. Como resultado desta evolução, o estado do *spin* na extremidade de Bob da cadeia variará com o tempo. Bob agora escolhe o momento ideal de tempo em um intervalo longo suficiente para receber o estado de Alice. Este momento de tempo é cuidadosamente escolhido para que o estado do *spin* no final da cadeia de Bob seja o mais próximo possível do que Alice pretendia transmitir. Neste momento ideal, Bob simplesmente pega o *spin* no fim da cadeia e conclui o

Figura 28 – Um grafo arbitrário de *spins* por meio do qual as comunicações quânticas podem ser realizadas usando o protocolo. A comunicação ocorre do *spin* s do emissor para o *spin* r do receptor.



Fonte: (BOSE, 2003)

protocolo de comunicação.

A figura 28 dá o caso geral deste problema. Aqui, tem-se um cenário geral de grafos arbitrários de *spins* com interações ferromagnéticas tipo Heisenberg. Considere que há N *spins* em um grafo e estão enumerados por $1, 2, \dots, N$. O Hamiltoniano é dado por

$$H_G = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{i,j} \sigma^i \cdot \sigma^j - \sum_{i=1}^N B_i \sigma_z^i, \quad (95)$$

onde $\sigma^i = (\sigma_x^i, \sigma_y^i, \sigma_z^i)$ sendo $\sigma_{x/y/z}^i$ as matrizes de Pauli para o i -ésimo *spin*. $B_i > 0$ é campo magnético estático e $J_{i,j} > 0$ são as forças de acoplamento e $\langle i, j \rangle$ representa os pares de *spins*.

Inicia-se o grafo no estado fundamental $|0\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 |0\rangle_4 |0\rangle \dots |0\rangle_N$, onde $|0\rangle$ indica o estado de *spin down*, ou seja, o *spin* se encontra alinhado ao longo do eixo $-z$. Introduce-se também uma classe de estados $|j\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3 |0\rangle_4 \dots |1\rangle_j \dots |0\rangle_N$, onde $j = 1, 2, \dots, s, \dots, r, \dots, N$ em que o *spin* do j -ésimo sítio foi excitado para o estado $|1\rangle$. Assume-se agora que o estado do emissor Alice está localizado o mais próximo possível do s -ésimo *spin* e o estado do receptor Bob é localizado o mais próximo possível do r -ésimo *spin*. Todos os outros *spins* serão chamados de canal de *spin*. Como mencionado anteriormente, para iniciar o protocolo, Alice simplesmente coloca o estado que ela deseja transmitir para Bob no s -ésimo *spin* no tempo $t = 0$. Seja este estado $|\psi_{in}\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle$. É possível então descrever o estado de toda cadeia no instante $t = 0$ como

$$|\psi(0)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |s\rangle \quad (96)$$

Bob agora espera por certo tempo τ até que o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ evolua para o estado final que será o mais próximo possível de $\cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\phi}\text{sen}(\theta/2)|r\rangle$. Esta evolução se dá de acordo com o Hamiltoniano da Eq.(95) tal que, em um tempo t seu estado se torna $|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle$, com $U(t) = e^{-iH_G t}$ (considerando $\hbar = 1$).

Note que o segundo Hamiltoniano da Eq.(95) representa uma interação de troca entre os *spins*, isto é, o *spin up* é transferido de um sítio para o próximo vizinho, ou seja, $|0\rangle_1|0\rangle_2\cdots|1\rangle_x|0\rangle_{x+1}\cdots|0\rangle_N$ vai para $|0\rangle_1|0\rangle_2\cdots|0\rangle_x|1\rangle_{x+1}\cdots|0\rangle_N$, logo, pode-se considerar que o número total de excitações é mantido. Dessa forma, tem-se que $[H_G, \sum_{i=1}^N \sigma_z^i] = 0$. Isto significa dizer que o estado $|s\rangle$ apenas evolui para o estado $|j\rangle$ e a evolução é dada por

$$|\psi(t)\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{j=1}^N \langle j|e^{-iH_G t}|s\rangle|j\rangle \quad (97)$$

O estado do r -ésimo *spin* será, geralmente, um estado misto, e pode ser obtido através do traço parcial dos estados de todos os outros *spins* de $|\psi(t)\rangle$. Uma explicação sobre operador densidade pode ser encontrado em (NIELSEN; CHUANG, 2002), mas, essencialmente, o operador densidade ρ_{out} do estado de saída é obtido por $\text{Tr}_{1,2,\dots,N-1}(|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|)$, onde $\text{Tr}_{1,2,\dots,N-1}$ significa calcular o traço sobre todos os estados do sistema de 1 até $N-1$. Este estado evolui com o tempo como

$$\rho_{out}(t) = P(t)|\psi_{out}(t)\rangle\langle\psi_{out}(t)| + (1 - P(t))|0\rangle\langle 0| \quad (98)$$

com

$$|\psi_{out}(t)\rangle = \frac{1}{[P(t)]^{1/2}} \left(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\text{sen}\frac{\theta}{2}f_{r,s}(t)|1\rangle \right) \quad (99)$$

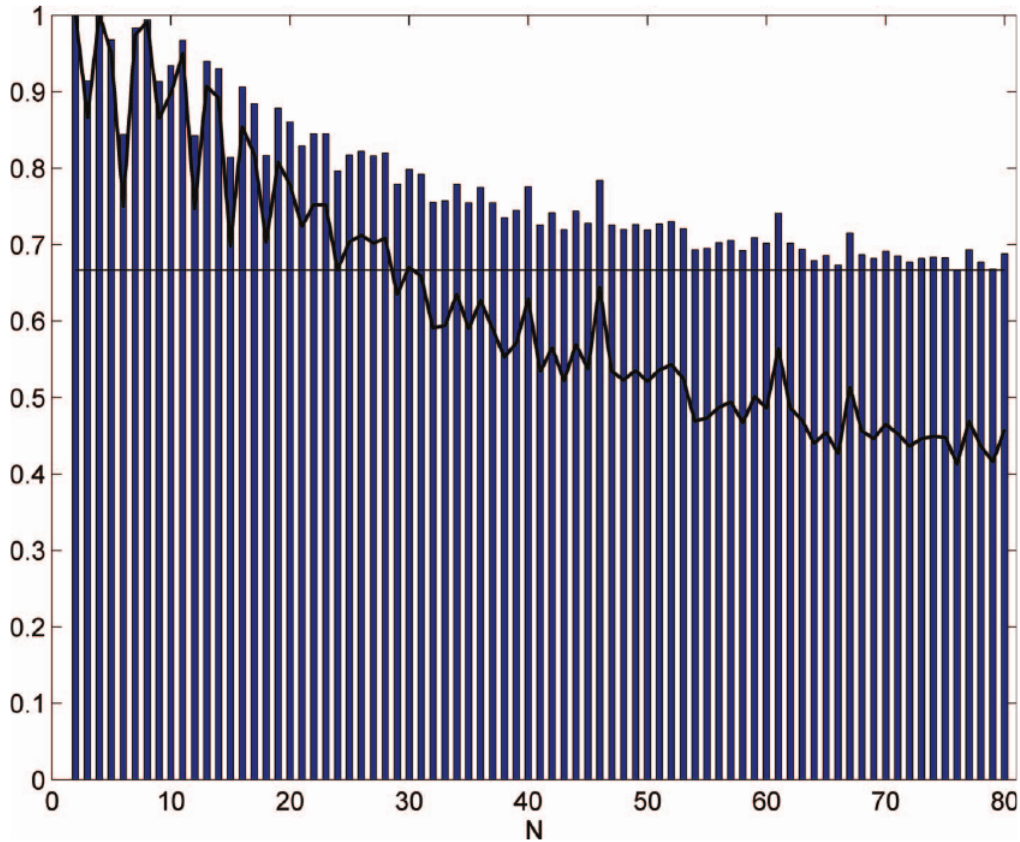
onde $P(t) = \cos^2(\theta/2) + \text{sen}^2(\theta/2)|f_{r,s}(t)|^2$ e $f_{r,s}(t) = \langle r|e^{-iH_G t}|s\rangle$. Note que $f_{r,s}$ é apenas a amplitude de transição de uma excitação (o estado $|1\rangle$) do s -ésimo para o r -ésimo sítio de um grafo de N *spins*.

Agora, suponha que o Bob decida pegar o r -ésimo *spin* e, portanto, conclua o protocolo de comunicação, em um tempo predeterminado $t = t_0$. A fidelidade da comunicação quântica através do canal calculada sobre todos os estados de entrada $|\psi_{in}\rangle$ na esfera de Bloch $(1/4\pi) \int \langle\psi_{in}|\rho_{out}(t_0)|\psi_{in}\rangle d\Omega$ é, então:

$$F = \frac{|f_{r,s}(t_0)|\cos(\gamma)}{3} + \frac{|f_{r,s}(t_0)|^2}{6} + \frac{1}{2} \quad (100)$$

onde $\gamma = \text{arg}\{f_{r,s}(t_0)\}$. Cálculos com mais detalhes referente a fidelidade se encontra no apêndice A. Para maximizar a média da fidelidade acima, deve-se escolher o campo magnético

Figura 29 – O gráfico de barras mostra a fidelidade máxima F da comunicação quântica alcançado em um intervalo de tempo $[0, 4000/J]$ como uma função do comprimento da cadeia N de 2 a 80. O tempo t_0 no qual este máximo é alcançado varia com N .



Fonte: (BOSE, 2007)

B_i de tal modo que γ seja múltiplo de 2π . Assumindo esta escolha especial de valor do campo magnético (que pode sempre ser feito para qualquer t_0) para fazer parte do nosso protocolo, pode-se simplesmente substituir $f_{r,s}(t_0)$ por $f_{N,1}(t_0)$ na Eq.(99).

Estuda-se agora a performance do protocolo para vários tamanhos de cadeia de comprimento N com $s = 1$ e $r = N$ (Alice e Bob nos extremos da cadeia como mostrada na figura (27)). É possível evoluir numericamente a Eq.(100) para vários comprimentos de cadeia de $N = 2$ até $N = 80$ quando Bob pode escolher t_0 dentro de um intervalo de tempo finito (mas longo) de comprimento $T_{max} = 4000/J$. Tomar um T_{max} finito é fisicamente razoável, pois, devido aos efeitos de decoerência, Bob não pode esperar indefinidamente. As fidelidades máximas como uma função de N e as quantidades máximas de emaranhamento compartilháveis (ambos arredondados para 3 casas decimais) são mostrados na figura 29. Vale ressaltar que as quantidades máximas de emaranhamento não foram analisadas em nos artigos publicados por nós, por isso, focaremos aqui apenas na fidelidade máxima.

A figura 29 mostra vários recursos interessantes do protocolo. O gráfico também mostra

que, além do caso trivial de $N = 2$, em $N = 4$ há transferência de estado quântico perfeita ($F = 1.000$) para três casas decimais e $N = 8$ dá quase perfeito ($F = 0.994$). A fidelidade também ultrapassa 0.9 para $N = 7, 10, 11, 13$ e 14. Até $N = 21$ observa-se que as fidelidades são menores quando N é divisível por 3 em comparação com as fidelidades para $N + 1$ e $N + 2$. O gráfico também mostra que uma cadeia de N próximo de 80 encontra-se uma fidelidade acima de $2/3$ no intervalo de tempo sondado no trabalho.

Como foi visto, uma cadeia perfeita só ocorre até $N = 4$, porém, precisa-se de cadeias maiores a depender do objetivo com os protocolos. Para isso, escolhe-se os acoplamentos J_{ij} cuidadosamente (mesmo quando há apenas acoplamentos de primeiros vizinhos, ou seja, $i = j + 1$) para obter uma cadeia de *spin* que realiza transferência de estado quântico perfeita (CHRISTANDL et al., 2004; NIKOLOPOULOS et al., 2004; ALBANESE et al., 2004; CHRISTANDL et al., 2005). Uma abordagem útil é de acoplar os *qubits* de envio e recebimento fracamente a um sistema quântico (SHI et al., 2005; PLENIO; SEMIÃO, 2005; WÓJCIK et al., 2005; WOJCIK et al., 2007). Considere que o sistema seja um grafo arbitrário de *spins* que interagem entre si com uma força de acoplamento $J \propto 1$, enquanto os *qubits* de envio e recebimento são acoplados ao sistema por meio de um acoplamento $\epsilon\xi$, onde $\epsilon\xi \ll 1$.

Considere dois *spins* acoplados a uma rede G de N *spins*. Escreve-se o Hamiltoniano de uma rede G como

$$H_G = \sum_{(i,j)} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) \quad (101)$$

onde σ_j^k é o k -ésima matriz de Pauli correspondendo ao *spin* j e somamos sob todas a rede (i, j) . Um *spin* de origem s é acoplado a um *spin* n_s de G , e um *spin* de destino d é acoplado a um *spin* n_d de G . A força desses acoplamentos é denotada por $\epsilon\xi_s, \epsilon\xi_d$, respectivamente, onde se assume que ξ_s, ξ_d são constantes independentes de N , mas ϵ diminui com N . Além disso, os *spins* s e d são colocados nos campos magnéticos locais ω_s e ω_d , respectivamente. Então, o Hamiltoniano de todo o sistema pode ser escrito como $H = H_G + H_{sd}$, onde H_G é dado na Eq.(101) e

$$H_{sd} = \epsilon\xi_s(\sigma_s^x \sigma_{n_s}^x + \sigma_s^y \sigma_{n_s}^y) + \epsilon\xi_d(\sigma_d^x \sigma_{n_d}^x + \sigma_s^y \sigma_{n_d}^y) + \frac{\omega_s}{2}(\sigma_s^z + 1) + \frac{\omega_d}{2}(\sigma_d^z + 1). \quad (102)$$

Começa-se com o *spin* s em um estado arbitrário $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ e o resto da rede no estado fundamental, ou seja,

$$|\Psi(t=0)\rangle = \alpha|\underbrace{00}_{sd}\underbrace{00\cdots 00}_{rede}\rangle + \beta|\underbrace{10}_{sd}\underbrace{00\cdots 00}_{rede}\rangle. \quad (103)$$

O objetivo é transferir o estado de *spin* s para o *spin* d , ou seja, após um tempo T , deseja-se encontrar

$$|\Psi(t = T)\rangle = \alpha \underbrace{|00\rangle}_{sd} \underbrace{|00 \cdots 00\rangle}_{rede} + e^{i\phi} \beta \underbrace{|01\rangle}_{sd} \underbrace{|00 \cdots 00\rangle}_{rede}. \quad (104)$$

Na Eq.(104), $e^{i\phi}$ é um fator de fase irrelevante que não depende do estado inicial e pode ser corrigido posteriormente por uma operação local no *spin* d . Note que $|00 \cdots 0\rangle$ é um autovetor de H , então, para transferir um estado quântico de s para d , é suficiente transferir uma excitação entre esses dois *spins*. Portanto, pode-se restringir aos estados que têm apenas uma excitação, isto é, deve-se considerar apenas a evolução de H que ocorre no espaço de Hilbert abrangido pelos vetores $|n\rangle$, onde n denota a posição da excitação e assume valores s, d ou $1, 2, \dots, N$. Logo, o caso de interesse é quando há apenas uma excitação no sistema e na evolução $|s\rangle \rightarrow e^{i\phi} |d\rangle$. Observa-se que o Hamiltoniano escrito nesta base é semelhante à matriz de adjacência da rede.

Seja $\{\lambda\}$ e $\{|\lambda\rangle\}$ o conjunto de autovalores e de autovetores de H_G , respectivamente. Então $H = H_0 + V$, onde

$$H_0 = \omega_s |s\rangle \langle s| + \omega_d |d\rangle \langle d| + \sum_{\lambda} \lambda |\lambda\rangle \langle \lambda| \quad (105)$$

e

$$V = \epsilon \sum_{\lambda} (\xi_s g_{s\lambda} + \xi_d g_{d\lambda} + H.c.) \quad (106)$$

onde

$$g_{s\lambda} = \langle s|\lambda\rangle, \quad g_{d\lambda} = \langle d|\lambda\rangle \quad (107)$$

Agora, considere dois casos distintos. No caso ressonante, tem-se $\omega_s = \omega_d = \lambda'$, onde λ' é um dos autovalores não degenerados de G . Para mais detalhes, ver a referência (WOJCIK et al., 2007). O caso de interesse aqui é o do não ressonante. A fim de obter um Hamiltoniano efetivo para o caso não ressonante, onde $\omega_s \neq \lambda$ e $\omega_d \neq \lambda$ para todo λ , ou seja, quando os campos magnéticos locais da fonte e dos *spins* de destino não estão sintonizados com nenhuma frequência natural da rede, segue-se a abordagem da teoria de perturbação. Define-se $H' = e^{iS} H e^{-iS}$, onde S é um operador Hermitiano a ser definido posteriormente. Observe que

$$H' = e^{iS} H e^{-iS}. \quad (108)$$

É possível notar que, aplicando $e^{iS} |\lambda\rangle$ em H' , fica-se com

$$H' e^{iS} |\lambda\rangle = e^{iS} H e^{-iS} e^{iS} |\lambda\rangle = e^{iS} H |\lambda\rangle = \lambda e^{iS} |\lambda\rangle. \quad (109)$$

Vamos agora expandir e^{iS} e e^{-iS} em série de potência na eq.(108)

$$H' = \left[1 + (iS) + \frac{(iS)^2}{2!} \cdots \right] (H_0 + V) \left[1 - (iS) - \frac{(iS)^2}{2!} \cdots \right],$$

$$H' = \left[(H_0 + V) + iS(H_0 + V) + \frac{(iS)^2}{2!} + \dots \right] \left[1 - iS - \frac{(iS)^2}{2!} + \dots \right].$$

Por fim, pode-se reorganizar da forma

$$H' = (H_0 + V) + i[S, H_0] + i[S, V] + \frac{i^2}{2!}[S, [S, H_0]] + \dots . \quad (110)$$

Agora, escolhe-se S como

$$S = i\epsilon \sum_{\lambda} \left(\frac{\xi_s g_{s\lambda}}{\lambda - \omega_s} |s\rangle \langle \lambda| + \frac{\xi_d g_{d\lambda}}{\lambda - \omega_d} |d\rangle \langle \lambda| + H.c. \right). \quad (111)$$

Assim, os termos de primeira ordem em ϵ da eq.(110) desaparecem, ou seja

$$V + i[S, H_0] = 0. \quad (112)$$

Aplicando a eq.(110) e desprezando os termos de $O(\epsilon^3)$ na Eq.(111), fica-se com

$$H' = H_0 + i[S, V] + \frac{i^2}{2!}[S, [S, H_0]]. \quad (113)$$

Reescrevendo o Hamiltoniano efetivo do sistema em forma matricial

$$H_{eff}^{sd} = \begin{pmatrix} \langle s | H' | s \rangle & \langle s | H' | d \rangle \\ \langle d | H' | s \rangle & \langle d | H' | d \rangle \end{pmatrix}.$$

Ficando com

$$H_{eff}^{sd} = \begin{pmatrix} \omega_s - A_s & B \\ B^* & \omega_d - A_d \end{pmatrix}, \quad (114)$$

onde

$$A_{s(d)} = \epsilon^2 |\xi_{s(d)}|^2 \sum_{\lambda} \frac{|g_{s(d)\lambda}|^2}{\lambda - \omega_{s(d)}}, \quad (115)$$

e

$$B = -\epsilon^2 \xi_s \xi_d^* \left(\sum_{\lambda} \frac{g_{s\lambda} g_{d\lambda}^*}{\lambda - \omega_s} + \sum_{\lambda} \frac{g_{s\lambda} g_{d\lambda}^*}{\lambda - \omega_d} \right). \quad (116)$$

O Hamiltoniano da Eq.(115) descreve um sistema de dois níveis que executa oscilações do tipo Rabi em uma escala de tempo definida pelo inverso do intervalo entre suas frequências normais. Para ter uma transferência de estados quânticos o mais perfeito possível, deve-se garantir que $h_s = h_r$, para conseguir isso, é necessário ter que $\omega_s = \omega_r$ e $g_s = g_r = g$. Um estado inicial preparado em $|s\rangle$ irá evoluir no tempo para $|r\rangle$ com amplitude quase unitária $\tau J = n\pi/(2J') = n\pi/(2\epsilon^2 g^2)$, com n sendo um inteiro ímpar (WOJCIK et al., 2007; WÓJCIK et al., 2005).

Em resumo, nos protocolos de transferência de estados quânticos do tipo Rabi (WOJCIK et al., 2007; LORENZO et al., 2013; ALMEIDA et al., 2016), um par de autoestados da

forma $|\psi^\pm\rangle \approx (|s\rangle + |r\rangle)/\sqrt{2}$ é o responsável final pela fidelidade da transferência. Observa-se que, para certas classes de canais, como uniformes ou dimerizados (ALMEIDA et al., 2016; ALMEIDA, 2018; CICCARELLO, 2011), pode-se obter formas analíticas para esses estados usando a teoria de perturbação. A forma expressa pela Eq. (115) é geral e será mais adequado para o trabalho a seguir, sem mencionar que tem-se canais desordenados.

3.2 PROPRIEDADES DE LOCALIZAÇÃO E TRANSFERÊNCIA DE ESTADO DE ALTA FIDELIDADE EM MODELOS DE *HOPPING* COM DESORDEM CORRELACIONADA

3.2.1 Modelo e Formalismo

Considera-se uma cadeia linear com N sítios descrito pelo Hamiltoniano eletrônico tipo *tight-binding*

$$H = \sum_{n=1}^N \epsilon_n |n\rangle \langle n| + \sum_{n=1}^{N+1} J_n (|n\rangle \langle n+1| + h.c.), \quad (117)$$

escrito no conjunto de base Wannier $\{|n\rangle\}$ contabilizando a posição do elétron, onde ϵ_n é a energia *on-site* e J_n é a força de *hopping*, sendo os dois as fontes de desordem estática. Estes parâmetros aqui são expressos em termos da energia unitária $J = 1$. Especificamente, assume-se que ambas as quantidades flutuam de modo que suas distribuições de desordem correspondentes vêm com correlações intrínsecas de longo alcance modeladas por meio do movimento browniano fracionário (MOURA; LYRA, 1998a; de Moura, F. A. B. F. et al., 2004; SANTOS et al., 2007; DOMÍNGUEZ-ADAME et al., 2003)

$$\epsilon_n, J_n = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{k^{\gamma/2}} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k\right) \quad (118)$$

É necessário enfatizar que a sequência gerada pela equação acima exibe um espectro de lei de potência $1/k^\gamma$ e ϕ_k representa uma fase aleatória uniformemente distribuída dentro do intervalo $[0, 2\pi]$. Para $\gamma = 0$, a sequência é bastante não correlacionada. Por outro lado, $\gamma > 0$ traz correlações de longo alcance na sequência de desordem. Portanto, o expoente γ se destaca como um parâmetro muito importante, pois controla o grau de correlação dentro da sequência desordenada. A seguir, a Eq.(118) será usado para gerar distribuição de desordem para ϵ_n e J_n mas, com alguns observações: (i) para ϵ_n atribui-se $\gamma \rightarrow \alpha$ e normaliza-se toda a sequência para que $\langle \epsilon_n \rangle = 0$ e $\langle \epsilon_n^2 \rangle = 1$; (ii) Para J_n , $\gamma \rightarrow \beta$ e redefine-se $J_n \rightarrow \tanh(J_n) + 2$ após a normalização, a fim de descartar possíveis forças de *hopping* nulo. Também é importante notar

que cada sequência para ϵ_n e J_n é gerada usando conjuntos de fases distintas, $\{\phi_k\}$. Em resumo, o modelo contém dois parâmetros independentes α e β que explicam o grau de correlações para fontes diagonais e fora da diagonal de desordem.

Todas as quantidades de interesse são obtidas através da diagonalização exata do Hamiltoniano da Eq.(117) que dá os autovalores $\{E_j\}$ e seu correspondente autovetor $|\psi^j\rangle = f_n^j |n\rangle$. O primeiro objetivo aqui será avaliar a taxa de participação definido como (SANTOS et al., 2007)

$$\xi^j = \frac{1}{\sum_n |f_n^j|^4}. \quad (119)$$

Esta medida quantifica o grau de localização. Em particular, o número de participação torna-se independente do tamanho para pacotes de ondas localizados e diverge com N para pacotes estendidos. Além disso, foi investigada a evolução do tempo eletrônico ao longo da cadeia. Inicializa-se o pacote de ondas inicial em $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(0) |n\rangle$ onde $c_n(0) = \delta_{n,n_0}$. O estado eletrônico no tempo t pode ser obtido a partir de $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$, onde

$$c_n(t) = \sum_j f_{n_0}^{j*} f_n^j e^{-iE_j t}. \quad (120)$$

Usando as relações acima, pode-se calcular a largura σ do pacote de ondas eletrônico através de (SALES; de Moura, 2012)

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n (n - \langle n(t) \rangle)^2 |c_n(t)|^2}, \quad (121)$$

onde $\langle n(t) \rangle = \sum_n n |c_n(t)|^2$ é a posição média eletrônica. Note que $\sigma(t)$ tende a 0 quando uma função de onda confinado em um único sítio, tende a $O(N)$ para uma onda estendida sobre todo o sistema. Observe que também se pode calcular o número de participação dependente do tempo definido como $\xi(t) = 1/\sum_n |c_n(t)|^4$. Ambas quantidades são formas distintas de obter uma estimativa do tamanho do pacote de onda no tempo t (SANTOS et al., 2007; SALES; de Moura, 2012)

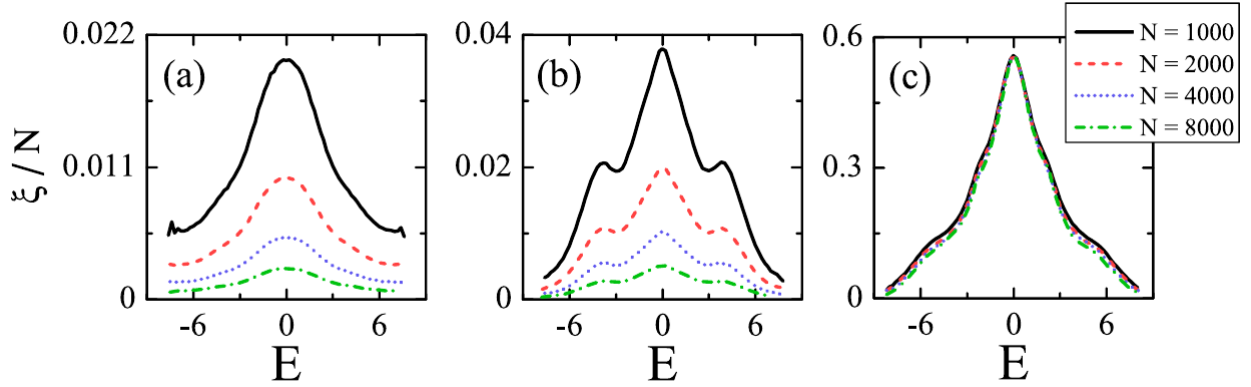
3.2.2 Resultados

Depois de apresentar as ferramentas principais na seção anterior, será fornecida agora uma investigação detalhada do papel real desempenhado pelas fontes diagonais e fora da diagonal de desordem agindo simultaneamente na cadeia.

3.2.2.1 Propriedades de localização

A análise começa mostrando resultados para a razão de participação de todo o conjunto de auto estados. Deve ser enfatizado que cada quantidade avaliada neste trabalho foi devidamente

Figura 30 – Número de participação redimensionado ξ/N versus E para (a) $\alpha = 3, \beta = 0$; (b) $\alpha = 0, \beta = 3$; e (c) $\alpha = 3, \beta = 3$ para vários tamanhos de sistema. Observe que para $\alpha = \beta = 3$ estados deslocalizados aparecem perto do centro da banda.



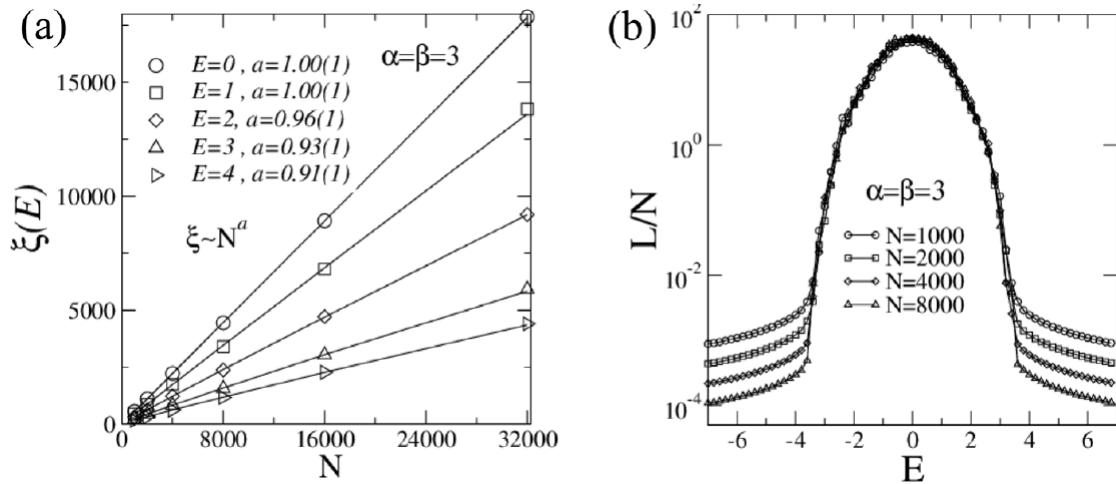
Fonte: (ALMEIDA et al., 2018)

calculada em média em muitas realizações distintas de desordem. O número total de auto estados $N_E = NM$ foi maior do que 105 para todos os cálculos, sendo M o número de amostras. Foi calculado a média de ξ^j sobre uma pequena janela em torno da energia E e, portanto, se está olhando para a quantidade $\xi(E) = (\sum_{E_j < E + \Delta E} \xi^j / n(E))$, onde $n(E)$ é o número de autovalores $\{E_j\}$ dentro do intervalo $[E - \Delta E, E + \Delta E]$. Aqui, fixou-se $\Delta E = 0.2$, que foi escolhido menor do que a largura de banda total, mas grande o suficiente para conter um grande número de auto estados para produzir uma boa média estatística.

Na figura 30 (a) - (c), representou-se graficamente o número médio de participação reescalado ξ/N versus energia E para muitas combinações de α e β . Os cálculos foram feitos para $N = 1000$ até 8.000 sítios. É possível observar na figura 30 (a) e (b) que ξ/N diminui à medida que o tamanho do sistema N aumenta independentemente do valor E . Essa é uma assinatura clara de que todos os autoestados ficam localizados no limite termodinâmico. Por outro lado, a figura 30 (c) revela um comportamento bastante interessante. Próximo ao centro da banda, o número de participação reescalado permanece constante, indicando o surgimento de estados estendidos nesta região. Para $|E| \gg 0$ observa-se que ξ/N diminui lentamente com N o que indica a presença de estados localizados longe do centro da banda. No entanto, esses estados localizados não são independentes do tamanho, como é comum em sistemas com desordem não correlacionada. Eles representam uma escala sublinear devido ao redimensionamento dependente do tamanho das constantes de acoplamento (LIMA et al., 2002).

A dependência do tamanho do número de participação para algumas energias típicas é mostrada na figura 31 (a). Para localizar claramente as *mobility edge* no caso de desordem forte, o comprimento de localização normalizado L/N é uma medida mais apropriada. O com-

Figura 31 – Em (a) mostra-se a dependência do tamanho do número de participação para algumas energias típicas, evidenciando a escala sublinear dos estados fracamente localizados próximos à borda da banda. O espectro do comprimento de localização normalizado L/N é mostrado em (b) que sinaliza claramente as bordas de mobilidade. Aqui fixamos $\alpha = \beta = 3$.



Fonte: (ALMEIDA et al., 2018)

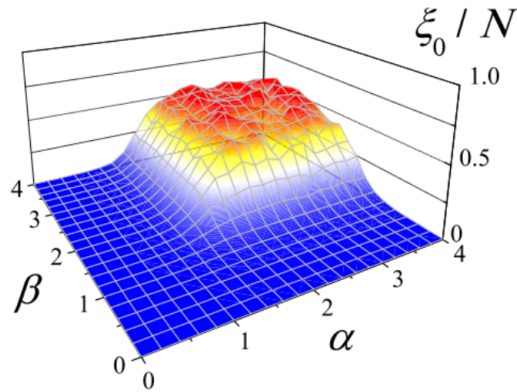
primento de localização L foi obtido usando um formalismo de matriz de transferência padrão (ver a referência (KRAMER; MACKINNON, 1993) para mais detalhes). Mesmo no regime de localização fraca com crescimento da lei de potência do número de participação, o comprimento da localização permanece finito porque está principalmente associado ao comportamento dos auto estados em suas caudas em decaimento exponencial.

Na figura 31 (b) relata-se o espectro do comprimento de localização normalizado para $\alpha = \beta = 3$ que sinaliza claramente as *mobility edges*. Desse modo, os cálculos mostram que os sistemas unidimensionais com desordem diagonal e fora da diagonal exibem apenas estados estendidos sempre que ambas as fontes de flutuações são aumentadas com fortes correlações de longo alcance. Se apenas α ou β for maior que zero, o transporte de elétrons pode ser suprimido pela presença de aleatoriedade não correlacionada na rede.

É possível ainda observar essa característica analisando a figura 32, onde foi feito o gráfico do número médio de participação em torno do centro da banda $\xi_0/N = \xi(E \approx 0)/N$ versus α e β para $N = 8000$. Nota-se que apenas para α e β maior que 2 obtém-se o número de participação reescalado $\xi_0/N \approx 0.58$ que é muito próximo ao valor correspondente dos estados estendidos em cadeias ordenadas com condições de contorno aberto, que é $2/3$. Os resultados também estão de acordo com o número de participação redimensionada para estados estendidos em sistemas desordenados (de Moura, F. A. B. F. et al., 2004; SANTOS et al., 2007; ASSUNÇÃO et al., 2011).

Além disso, é relevante apontar que, de modo geral, γ está relacionado ao chamado

Figura 32 – Número de participação reescalada em torno do centro da banda, $\xi(E \approx 0)/N$ versus α versus β para $N = 8000$. A cadeia é capaz de suportar estados estendidos em torno do centro da banda somente quando as fontes de desordem na diagonal e fora da diagonal são correlacionadas a longo prazo, obedecendo, grosso modo, $\alpha, \beta > 2$.



Fonte: (ALMEIDA et al., 2018)

expoente de Hurst H até $H = (\gamma - 1)/2$ que descreve a memória de longo prazo de uma determinada série. O conjunto medido pela Eq.(118) é dito não estacionário quando $\gamma > 1$ e persistente (anti-persistente) quando $\gamma > 2$ ($\gamma < 2$). Quando $\alpha = 2$ a série corresponde exatamente ao traço do movimento browniano. $H = 1$ para $\gamma \geq 3$ sinalizando que a série gerada torna-se localmente correlacionada sem nenhuma rugosidade local no limite termodinâmico. No entanto, a desordem global ainda persiste devido à natureza aleatória das fases usadas para gerar a série completa. Além disso, como mostrado em (MOURA; LYRA, 1998a), no caso de desordem no local apenas, $\alpha = 2$ marca o ponto de transição entre o isolante tipo Anderson e as fases metálicas com *mobility edge* agudas.

3.2.2.2 Dinâmica de tempo e transferência de estado quântico

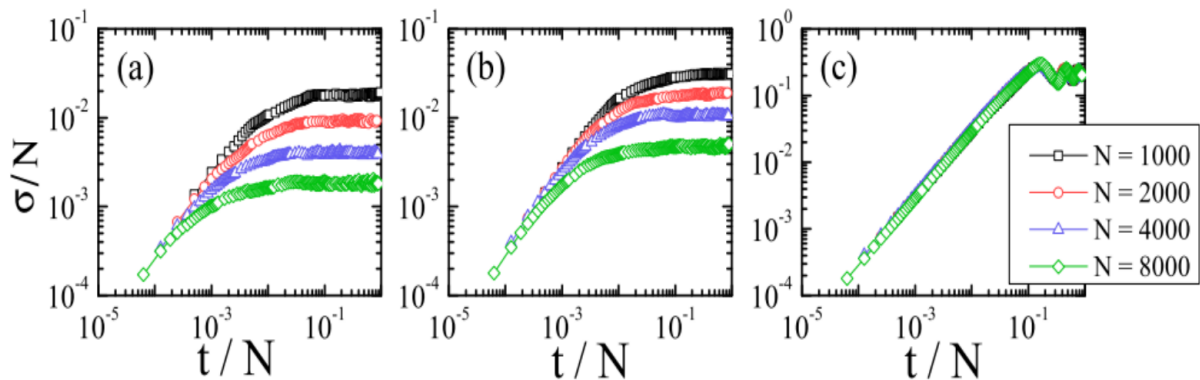
A interação entre estados localizados e deslocalizados que foi visto na seção anterior permite uma rica variedade de regimes dinâmicos (DOMÍNGUEZ-ADAME et al., 2003). O objetivo agora é explorar como a competição entre duas fontes independentes de desordem correlacionada reflete no perfil de propagação do estado inicial de um único elétron. Em seguida, será abordada uma aplicação muito atraente dessas plataformas no contexto do processamento quântico de informações.

As figuras 33 e 34 mostram um resumo dos cálculos para o *spread* dependente do tempo

e o número de participação para um estado inicial semelhante a delta preparado no $(N/2)$ -ésimo sítio local, que é $c_n(0) = \delta_{n,N/2}$. Esses coeficientes em um momento posterior são avaliados por meio da Eq.(120) para $N = 1000$ até 8000 para várias combinações de α e β . Para fins de comparação, o tempo e as funções de interesse foram reescalados pelo tamanho do sistema N . Calcula-se $c_n(t)$ até que um estado estacionário pudesse ser alcançado após múltiplas reflexões do pacote de ondas nos limites da rede. Portanto, para α e β maiores que 2 [ver figuras 33 (c) e 34 (c)] foi obtido um colapso acentuado da curva, o que implica que o pacote de ondas se espalha balisticamente antes de atingir os limites da cadeia. Observe que o colapso dos dados do número de participação é menos impressionante porque essa quantidade é mais afetada por flutuações estatísticas. Para α ou β inferior a 2, por outro lado, os painéis (a) e (b) das figuras 33 e 34, claramente não há colapso, sugerindo uma dinâmica eletrônica muito mais lenta ao longo da cadeia (de Moura, F. A. B. F. et al., 2004).

Em linhas gerais, os resultados mostram que as cadeias com desordem correlacionada em

Figura 33 – Desvio médio quadrático reescalado (σ/N) versus tempo reescalado (t/N para (a) $\alpha = 3, \beta = 0$, (b) $\alpha = 0, \beta = 3$ e (c) $\alpha = \beta = 3$).

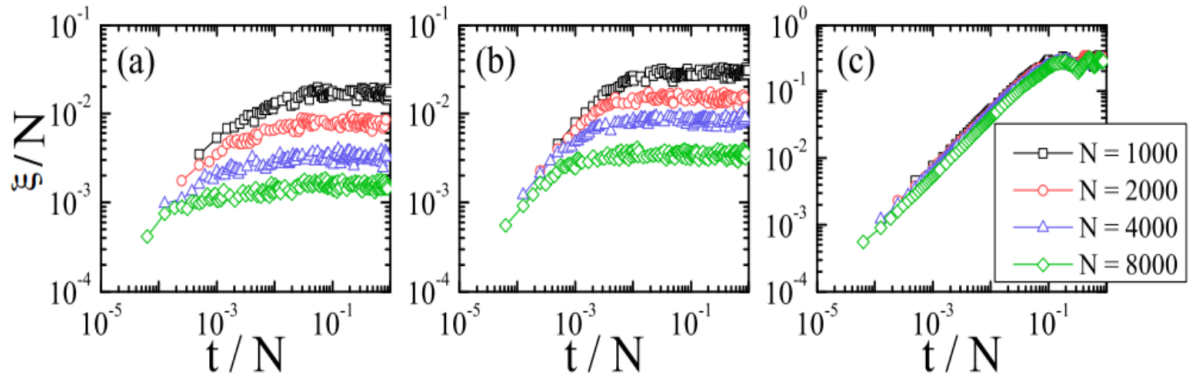


Fonte: (ALMEIDA et al., 2018)

termos diagonais e não diagonais só podem suportar a presença de estados estendidos uma vez que ambas as fontes de desordem exibem correlações fortes o suficiente, ou seja, $\alpha, \beta > 2$. Ainda assim, é muito impressionante que duas fontes concorrentes e independentes de ruído permitam a transmissão coerente de excitações eletrônicas através da cadeia. Isso poderia, por exemplo, encontrar muitas aplicações em protocolos de comunicação quântica usando dispositivos de estado sólido (APOLLARO et al., 2013). Agora, avaliamos a robustez de um protocolo de transferência de estado quântico (BOSE, 2003) contra essas fontes de desordem generalizada.

Primeiro, será feito mais suposições sobre a configuração do sistema. Agora se considera uma cadeia composta por $N + 2$ sítios [descritos pelo mesmo Hamiltoniano na Eq. (117) agora

Figura 34 – Participação reescalada (ξ/N) versus tempo reescalado (t/N) para (a) $\alpha = 3, \beta = 0$, (b) $\alpha = 0, \beta = 3$ e (c) $\alpha = \beta = 3$.



Fonte: (ALMEIDA et al., 2018)

com $N \rightarrow N + 2$], de modo que o primeiro e o último atuarão como, respectivamente, emissor e receptor. Define-se $\epsilon_1 = \epsilon_n = 0$ e $J_1 = J_{N+1} = g$, ou seja, a desordem está presente apenas ao longo do próprio canal de comunicação (locais 2 a $N + 1$). O esquema de transferência que é empregado aqui é baseado no modelo de acoplamento fraco (WÓJCIK et al., 2005; WOJCIK et al., 2007; ALMEIDA, 2018), geralmente trabalhado no contexto de cadeias de *spin*, onde g é definido várias ordens de magnitude mais fraco do que a escala de energia do canal. Isso força ambos os locais finais a abrangerem seu próprio subespaço, com um par de autoestados tomando a forma $|\Psi^\pm\rangle = (|1\rangle \pm |N + 2\rangle)/\sqrt{2}$ para que a transmissão de estado ocorra por meio de uma dinâmica coerente entre eles após tempo $\tau \approx \pi/\delta\lambda$, com $\delta\lambda$ sendo a lacuna de energia (geralmente muito pequena) entre esses estados. Naturalmente, uma transmissão quase perfeita deve ser esperada em cadeias ordenadas. Se não for esse o caso, a presença de desordem generalizada quebra as simetrias do sistema, danificando assim o acoplamento efetivo de dois corpos entre as extremidades da cadeia (WOJCIK et al., 2007).

Será mostrado agora que um protocolo de transferência de estado quântico de alta fidelidade pode realmente ser realizado na presença de flutuações correlacionadas, envolvendo todo o canal. Aqui será mostrado o protocolo de transferência seguindo a proposta original da referência (BOSE, 2003). Suponha que Alice deseja enviar um qubit arbitrário $|\phi\rangle_1 = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1$ para Bob, onde $|0\rangle_i$ ($|1\rangle_i$) denota a ausência (presença) de um elétron no sítio i . Então, Alice organiza um estado inicial da forma $|\psi(0)\rangle = |\phi\rangle_1 |0\rangle_2 \cdots |0\rangle_{N+2}$. Ao deixar o sistema evoluir seguindo sua dinâmica hamiltoniana natural, ela espera, no melhor cenário, ter $|\psi(\tau)\rangle = |0\rangle_1 |0\rangle_2 \cdots |0\rangle_{N+1} |\phi\rangle_{N+2}$ para que Bob possa recuperar o *qubit* corretamente. Uma medida para a figura de mérito do protocolo pode ser obtida calculando a média da fidelidade de

entrada em toda a esfera de Bloch (para detalhes, consulte (BOSE, 2003)):

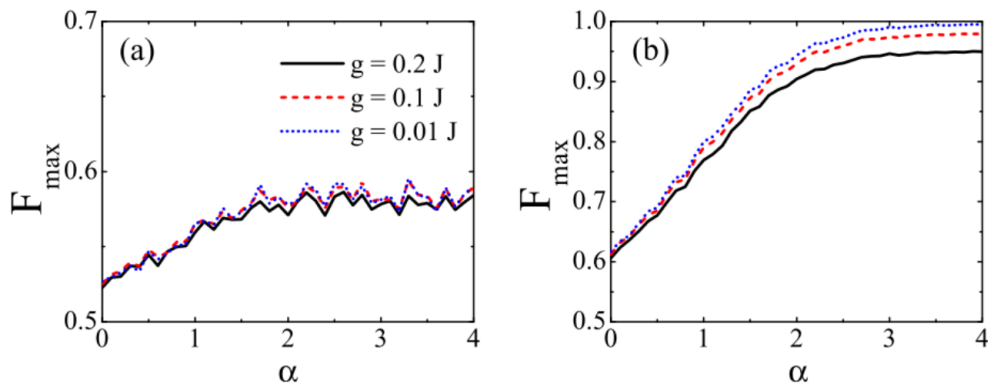
$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{|c_{N+2}(t)|}{3} + \frac{|c_{N+2}(t)|^2}{6}, \quad (122)$$

que é basicamente uma função monotônica da amplitude de transição entre os sites emissor e receptor $C_{N+2}(t) = \sum_j f_1^{j*} f_{N+2}^j e^{-iE_j t}$ [Eq.(120)]

Aqui, se está preocupados com a fidelidade máxima $F_{max} = \max\{F(t)\}$ alcançada durante um determinado intervalo, uma vez que a escala de tempo dinâmica do sistema varia consideravelmente de amostra para amostra. Em particular, avaliou-se F_{max} ao longo de $tJ \in [0.2 \times 10^5]$ para cerca de 500 realizações independentes de desordem e foi calculado a média deles para cada configuração do sistema, conforme mostrado na figura 35. Lá, é claro que um protocolo de transferência eficiente pode ser realizada por meio desse canal ruidoso, uma vez apoiada por correlações intrínsecas proeminentes em ambas as fontes de desordem [ver figura 35 (b)]. Foi observado que F_{max} tende a saturar após $\alpha > 2$, apontando o papel crucial dos estados estendidos no processo. Também se destaca, na figura 35 (b), que é possível atingir fidelidade quase perfeita desde que g seja fraco o suficiente, a fim de evitar a mistura entre os subespaços de canal e emissor/receptor.

O que é mais impressionante nos resultados mostrados acima é que, embora o canal

Figura 35 – Fidelidade máxima versus α sob 500 realizados de desordem independentes em uma rede com 50 sítios (totalizando um total de 52 sítios) para (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 3$. As linhas sólidas, tracejadas e pontilhadas exibem os resultados para $g/J = 0.2$, 0.1 e 0.01, respectivamente. $F_{max} = \max\{F(t)\}$ evoluiu por um tempo de $tJ \in [0, 2 \times 10^5]$.



Fonte: (ALMEIDA et al., 2018)

ruidoso deva ser aumentado com fortes correlações de longo alcance para estabelecer rodadas de transferência de estado quântico bem-sucedidas, quantidades consideráveis de desordem global ainda estão presentes no sistema devido a natureza aleatória das fases usadas para gerar a paisagem potencial. Isso, em última análise, destrói as simetrias do espectro (YAO et al., 2011) e,

portanto, intuitivamente, não deve permitir uma interação ressonante efetiva entre as extremidades externas da cadeia. Felizmente, isso realmente acontece. Uma imagem muito útil disso pode ser apresentada escrevendo o Hamiltoniano desacoplado emissor/receptor com parâmetros renormalizados obtidos por meio da teoria de perturbação de segunda ordem em g [(para detalhes, consulte a referência (WOJCIK et al., 2007)), $H_{eff} = h_1 |1\rangle \langle 1| + h_{N+2} |N+2\rangle \langle N+2| - J'(|1\rangle \langle N+2| + H.c.)$, onde

$$h_1 = -g^2 \sum_k |f_2^k|^2 / E_k, \quad (123)$$

$$h_{N+2} = -g^2 \sum_k |f_{N+1}^k|^2 / E_k, \quad (124)$$

$$J' = g^2 \sum_k f_2^k f_{N+1}^{k*} / E_k, \quad (125)$$

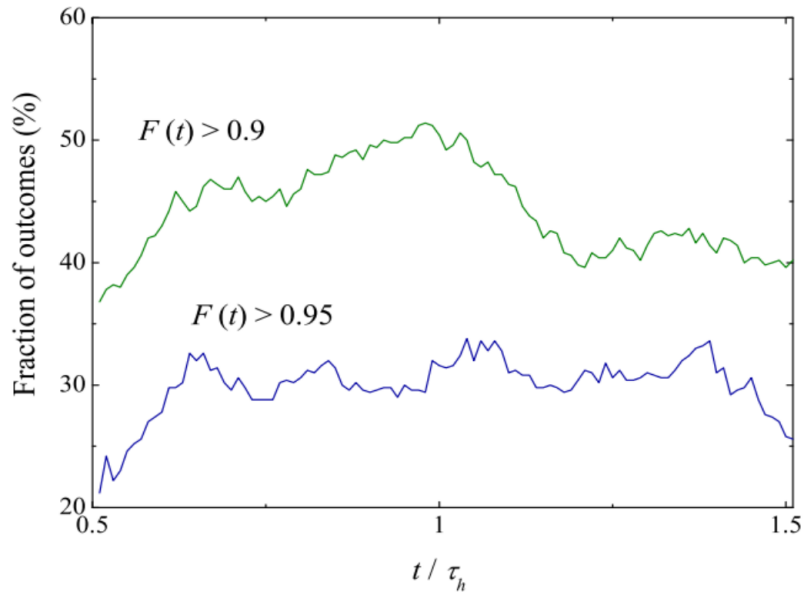
com a soma em k ultrapassando os modos normais do canal apenas. Lembrando que os locais 1 (emissor) e $N+2$ (receptor) estão sintonizados no meio da banda, $\epsilon_1 = \epsilon_{N+2} = 0$, a existência de estados deslocalizados nesta região do espectro proporcionou o grau de correlações α e β são altos o suficiente (isto é, maiores que 2) é tal que mascara a natureza assimétrica geral da cadeia, produzindo distribuições bastante equilibradas de amplitudes f_2^k e f_{N+1}^k . Portanto, $h_1 \approx h_{N+2}$ o que desencadeia uma dinâmica efetiva de dois sítios com impurezas locais desprezíveis. Além disso, uma vez que os parâmetros renormalizados [Eqs. (121) a (125)] escalam com E_k^{-1} , os limites da banda, preenchidos por estados semelhantes a localizados (portanto, mais espacialmente assimétricos), têm uma influência muito mais fraca sobre eles.

3.2.2.3 Timing

Anteriormente, foi discutido sobre a transferência de estado, concentrando nas estatísticas de fidelidade durante um intervalo de tempo fixo. Isso permitiu avaliar a perspectiva de gerar uma dinâmica eficaz de dois estados (tipo Rabi) entre o primeiro e o último sítio da cadeia sob a influência de desordem correccionada de longo alcance. No lado prático, no entanto, deve-se informar Bob antecipadamente sobre o tempo (pelo menos aproximadamente) que o estado deve chegar ao seu local. A desordem, no entanto, inevitavelmente levará a erros de tempo, a menos que esteja disponível um conhecimento preciso sobre a configuração da cadeia em todas as realizações. Ainda assim, é conveniente estabelecer uma janela de tempo de medição adequada com maiores chances de obter o estado pretendido, compatível com o tipo de desordem presente no sistema.

Para ver isso, discute-se primeiro como o tempo de transferência responde às forças de *hopping* da cadeia. É importante lembrar que o tempo de transferência para o modelo efetivo de

Figura 36 – Fração de amostras que satisfazem $F(t) > 0.9$ e $F(t) > 0.95$ versus tempo em unidades de $t/t_h = \pi J/g^2$. Reuniu-se 500 realizações de desordem independentes para $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $N = 50$ e $g = 0.01J$.



Fonte: (ALMEIDA et al., 2018)

dois sítios é dado por $\pi/\delta\lambda$, com a diferença $\delta\lambda = 2J'$ [ver Eq.(125)]. Dada uma distribuição uniforme dos potenciais *on site* (ou seja, $\epsilon_n = \epsilon$) em um canal com um número par de sítios N , isso foi mostrado em (ALMEIDA, 2018) que o acoplamento eficaz J' entre as extremidades externas da cadeia pode ser expresso por uma fórmula surpreendentemente simples,

$$J' = g^2 \frac{J_3 J_5 \cdots J_{N-1}}{J_2 J_4 \cdots J_N} (-1)^{\frac{N}{2}} \quad (126)$$

Portanto, vê-se facilmente que, para acoplamentos homogêneos, $J_i = 2J$ acima, o tempo de transferência é $\tau_h = \pi J/g^2$. Levando em consideração a configuração de desordem, espera-se que o tempo de transferência τ associado a fidelidades mais altas (próximo a um) caia nas proximidades de τ_h .

A figura 36 mostra a fração de amostras exibindo $F(t) > 0.9$ e $F(t) > 0.95$ em momentos que variam de $t = 0.5\tau_h$ a $t = 1.5\tau_h$. Observa-se prontamente que cerca de 50% das realizações da desordem tinham fidelidade acima de 0,9 em momentos específicos próximos a τ_h . Ao aumentar esse limite para 0,95, a fração atinge um pouco mais de 30%. Isso é esperado porque a fidelidade aqui é amplamente uma função oscilante e, assim, quando se olha para o pico em algum momento bem definido, o número de amostras que satisfazem o limite diminuirá.

Por fim, menciona-se que, por um lado, os protocolos de comunicação quântica por meio de extremidades com acoplamentos fracos (WÓJCIK et al., 2005; WOJCIK et al., 2007; ALMEIDA, 2018) exigem um tempo caracteristicamente longo para realizar a transferência,

quando comparados aos esquemas totalmente projetados (CHRISTANDL et al., 2004). Por outro lado, mostra-se muito robusto contra perturbações estáticas (ZWICK et al., 2011). O tempo de transferência pode ser substancialmente reduzido, otimizando os acoplamentos externos, a fim de alcançar o chamado regime balístico para a transferência de estado quântico (APOLLARO et al., 2012; BANCHI et al., 2010). A influência da desordem correlacionada nesse regime é um assunto que vale a pena investigar no futuro.

3.2.2.4 Considerações Finais

Neste trabalho, foi considerado uma cadeia eletrônica do tipo *tight-binding* com desordem correlacionada em termos diagonais e fora da diagonal do Hamiltoniano. O movimento fracionário browniano foi usado para gerar as distribuições correspondentes de cada desordem. Foi analisado as propriedades de localização do sistema, contabilizadas pela taxa de participação de todo o seu espectro, e também avaliou-se o perfil da dinâmica eletrônica ao longo da cadeia. Foi mostrado que esse modelo suporta estados estendidos apenas se ambas as fontes de desordem contiverem fortes correlações intrínsecas de longo alcance com $\alpha > 2$ e $\beta > 2$. Também investigou-se uma possível aplicação para essa classe de cadeias no contexto de protocolos de transferência no estado quântico. Ao acoplar perturbativamente ambas as partes que se comunicam com a cadeia com ruído, é possível transmitir uma excitação de uma extremidade da cadeia para outra com fidelidade muito alta, desde que um conjunto adequado de estados deslocalizados esteja disponível no espectro, a fim de superar a assimetria espacial induzida pela desordem.

Ao abordar as propriedades de um modelo de *hopping* eletrônico padrão aumentado com duas desordens correlacionadas de longo alcance, foi preparado o terreno para novos estudos nessa direção envolvendo outras classes de modelos de interação para muitos corpos. Além disso, também se destaca a importância de investigar tipos especiais de desordem que podem ocorrer em dispositivos reais de estado sólido para tarefas de processamento de informações quânticas.

4 Conclusão Geral

Ao longo desta tese foram relatados os trabalhos já publicados na literatura voltados ao estudo de transporte eletrônico e principalmente de informação quântica. É notável o surgimento de novas portas para estudos futuros e melhor compreensão de assuntos acerca desta tão recente área. Dentro deste contexto, foram escolhidos os trabalhos que envolvem o estudo de caminhadas aleatórias quânticas e transferência de estados quânticos. A seguir serão apresentados resumidamente os resultados obtidos nos trabalhos abordados nesta tese.

Primeiramente, no capítulo 1, tratou-se em um aspecto geral sobre informação e computação quântica, com uma retrospectiva histórica e sobre o *qubit*, a menor unidade de informação quântica. Além disso, ainda neste capítulo, foi feita uma explanação dos principais pontos sobre o modelo de Anderson e sobre a sua variante, onde se têm desordem correlacionada.

No capítulo 2, foi realizado uma discursão sobre caminhada aleatória clássica e sobre caminhada quântica em tempo contínuo. Depois, na seção 2.2, foi explicado como realizar uma caminhada quântica em tempo discreto e todos o formalismo necessário para realizá-la. Nas seções 2.3 e 2.4, foi apresentado dois resultados publicados por mim e meu grupo de pesquisa na área de caminhadas quânticas em sistemas desordenados com correlações.

No capítulo 3, foi mostrado como realizar uma transferência de estados quânticos e o protocolo necessário para realizá-la. Depois, foi mostrado que, ao acoplarmos os *qubits* emissor e receptor ao canal de forma que este acoplamento seja fraco, consegue-se aumentar a fidelidade da transferência. Por fim, foi apresentado o artigo publicado sobre transferência de estados quânticos usando desordem correlacionada.

Por último, as perspectivas futuras é abordar estes assuntos em outros meios, como por exemplo, como a desordem correlacionada afeta a moeda em vez do deslocamento. Ou como outros tipos de desordem influenciam no caminhante ou na transferência de estados. Sem contar que é de suma importância avaliar o efeito da desordem em protocolos de transferência quânticas diferentes, a fim de obter resultados mais satisfatórios em relação ao tempo de transferência do estado.

REFERÊNCIAS

- ABAL, G.; SIRI, R.; ROMANELLI, A.; DONANGELO, R. Quantum walk on the line: Entanglement and nonlocal initial conditions. **Physical Review A**, APS, v. 73, n. 4, p. 042302, 2006.
- ABRAHAMAS, E.; ANDERSON, P. W.; LICCIARDELLO, D. C.; RAMAKRISHNAN, T. V. Scaling theory of localization: Absence of quantum diffusion in two dimensions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 42, p. 673–676, Mar 1979. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.42.673>>.
- AHARONOV, D.; AMBAINIS, A.; KEMPE, J.; VAZIRANI, U. Quantum walks on graphs. In: **Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing**. [S.l.: s.n.], 2001. p. 50–59.
- AHARONOV, Y.; DAVIDOVICH, L.; ZAGURY, N. Quantum random walks. **Physical Review A**, APS, v. 48, n. 2, p. 1687, 1993.
- ALBANESE, C.; CHRISTANDL, M.; DATTA, N.; EKERT, A. Mirror inversion of quantum states in linear registers. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 93, p. 230502, Nov 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.230502>>.
- ALMEIDA, G.; MENDES, C.; LYRA, M.; MOURA, F. de. Localization properties and high-fidelity state transfer in hopping models with correlated disorder. **Annals of Physics**, v. 398, p. 180–189, 2018. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0003491618302422>>.
- ALMEIDA, G. M.; MOURA, F. A. de; APOLLARO, T. J.; LYRA, M. L. Disorder-assisted distribution of entanglement in x y spin chains. **Physical Review A**, APS, v. 96, n. 3, p. 032315, 2017.
- ALMEIDA, G. M.; MOURA, F. A. de; LYRA, M. L. Quantum-state transfer through long-range correlated disordered channels. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 382, n. 20, p. 1335–1340, 2018.
- ALMEIDA, G. M. A. Interplay between speed and fidelity in off-resonant quantum-state-transfer protocols. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 98, p. 012334, Jul 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.012334>>.
- ALMEIDA, G. M. A.; CICCARELLO, F.; APOLLARO, T. J. G.; SOUZA, A. M. C. Quantum-state transfer in staggered coupled-cavity arrays. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 93, p. 032310, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.93.032310>>.
- AMBAINIS, A.; BACH, E.; NAYAK, A.; VISHWANATH, A.; WATROUS, J. One-dimensional quantum walks. In: **Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing**. [S.l.: s.n.], 2001. p. 37–49.
- ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. **Phys. Rev.**, American Physical Society, v. 109, p. 1492–1505, Mar 1958. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.109.1492>>.
- APOLLARO, T. J.; LORENZO, S.; PLASTINA, F. Transport of quantum correlations across a spin chain. **International Journal of Modern Physics B**, World Scientific, v. 27, n. 01n03, p. 1345035, 2013.

- APOLLARO, T. J. G.; BANCHI, L.; CUCCOLI, A.; VAIA, R.; VERRUCCHI, P. 99%-fidelity ballistic quantum-state transfer through long uniform channels. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 85, p. 052319, May 2012. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.052319>>.
- ARUTE, F.; ARYA, K.; BABBUSH, R.; BACON, D.; BARDIN, J. C.; BARENDTS, R.; BISWAS, R.; BOIXO, S.; BRANDAO, F. G.; BUELL, D. A. et al. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 574, n. 7779, p. 505–510, 2019.
- ASSUNÇÃO, T.; LYRA, M.; de Moura, F.; DOMÍNGUEZ-ADAME, F. Coherent electronic dynamics and absorption spectra in an one-dimensional model with long-range correlated off-diagonal disorder. **Physics Letters A**, v. 375, n. 6, p. 1048 – 1052, 2011. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960111000065>>.
- BANCHI, L.; APOLLARO, T. J. G.; CUCCOLI, A.; VAIA, R.; VERRUCCHI, P. Optimal dynamics for quantum-state and entanglement transfer through homogeneous quantum systems. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 82, p. 052321, Nov 2010. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.82.052321>>.
- BARNESLEY, M. F.; DEVANEY, R. L.; MANDELROT, B. B.; PEITGEN, H.-O.; SAUPE, D.; VOSS, R. F.; FISHER, Y.; MCGUIRE, M. **The science of fractal images**. [S.l.]: Springer, 1988.
- BELLANI, V.; DIEZ, E.; HEY, R.; TONI, L.; TARRICONE, L.; PARRAVICINI, G.; DOMÍNGUEZ-ADAME, F.; GÓMEZ-ALCALÁ, R. Experimental evidence of delocalized states in random dimer superlattices. **Physical review letters**, APS, v. 82, n. 10, p. 2159, 1999.
- BENIOFF, P. The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical hamiltonian model of computers as represented by turing machines. **Journal of statistical physics**, Springer, v. 22, n. 5, p. 563–591, 1980.
- BENNETT, C. H.; BRASSARD, G. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. **Theoretical Computer Science**, v. 560, p. 7 – 11, 2014. ISSN 0304-3975. Theoretical Aspects of Quantum Cryptography – celebrating 30 years of BB84. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397514004241>>.
- BERRY, S. D.; WANG, J. B. Quantum-walk-based search and centrality. **Physical Review A**, APS, v. 82, n. 4, p. 042333, 2010.
- BISWAS, P.; CAIN, P.; RÖMER, R.; SCHREIBER, M. Off-diagonal disorder in the anderson model of localization. **physica status solidi (b)**, Wiley Online Library, v. 218, n. 1, p. 205–209, 2000.
- BLINOV, B. B.; MOEHRING, D. L.; DUAN, L.-M.; MONROE, C. Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 428, n. 6979, p. 153–157, 2004.
- BOSE, S. Quantum communication through an unmodulated spin chain. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 91, p. 207901, Nov 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.207901>>.
- BOSE, S. Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview. **Contemporary Physics**, Taylor & Francis, v. 48, n. 1, p. 13–30, 2007.

- BRITO, S.; CANABARRO, A.; CAVALCANTI, D.; CHAVES, R. Satellite-based photonic quantum networks are small-world. **P R X Quantum**, APS, v. 2, p. 010304, 2020.
- BRITO, S.; CANABARRO, A.; CHAVES, R.; CAVALCANTI, D. Statistical properties of the quantum internet. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 124, p. 210501, May 2020. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.124.210501>>.
- CHANDRASHEKAR, C. Implementing the one-dimensional quantum (hadamard) walk using a bose-einstein condensate. **Physical Review A**, APS, v. 74, n. 3, p. 032307, 2006.
- CHATTARAJ, T.; KREMS, R. Effects of long-range hopping and interactions on quantum walks in ordered and disordered lattices. **Physical Review A**, APS, v. 94, n. 2, p. 023601, 2016.
- CHRISTANDL, M.; DATTA, N.; DORLAS, T. C.; EKERT, A.; KAY, A.; LANDAHL, A. J. Perfect transfer of arbitrary states in quantum spin networks. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 71, p. 032312, Mar 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.032312>>.
- CHRISTANDL, M.; DATTA, N.; EKERT, A.; LANDAHL, A. J. Perfect state transfer in quantum spin networks. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 92, p. 187902, May 2004. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.187902>>.
- CICCARELLO, F. Resonant atom-field interaction in large-size coupled-cavity arrays. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 83, p. 043802, Apr 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.043802>>.
- CODLING, E. A.; PLANK, M. J.; BENHAMOU, S. Random walk models in biology. **Journal of the Royal society interface**, The Royal Society London, v. 5, n. 25, p. 813–834, 2008.
- CÔTÉ, R.; RUSSELL, A.; EYLER, E. E.; GOULD, P. L. Quantum random walk with rydberg atoms in an optical lattice. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 8, n. 8, p. 156, 2006.
- COUTINHO, G.; PORTUGAL, R. Discretization of continuous-time quantum walks via the staggered model with hamiltonians. **Natural Computing**, Springer, v. 18, n. 2, p. 403–409, 2019.
- CRESPI, A.; OSELLAME, R.; RAMPONI, R.; GIOVANNETTI, V.; FAZIO, R.; SANSONI, L.; NICOLA, F. D.; SCIARRINO, F.; MATALONI, P. Anderson localization of entangled photons in an integrated quantum walk. **Nature Photonics**, Nature Publishing Group, v. 7, n. 4, p. 322–328, 2013.
- de Moura, F. A. B. F.; Coutinho-Filho, M. D.; Lyra, M. L.; Raposo, E. P. Delocalization and ballistic dynamics in the two-dimensional anderson model with long-range correlated disorder. **Europhys. Lett.**, v. 66, n. 4, p. 585–591, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209/epl/i2003-10238-4>>.
- DEUTSCH, D. Quantum theory, the church–turing principle and the universal quantum computer. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 400, n. 1818, p. 97–117, 1985.
- DEUTSCH, D.; JOZSA, R. Rapid solution of problems by quantum computation. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences**, The Royal Society London, v. 439, n. 1907, p. 553–558, 1992.

- DIAS, W.; de Moura, F.; COUTINHO-FILHO, M.; LYRA, M. Kosterlitz–thouless-like transition in two-dimensional lattices with long-range correlated hopping terms. **Physics Letters A**, v. 374, n. 34, p. 3572–3575, 2010. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037596011000798X>>.
- DOMÍNGUEZ-ADAME, F.; MALYSHEV, V. A.; MOURA, F. A. B. F. de; LYRA, M. L. Bloch-like oscillations in a one-dimensional lattice with long-range correlated disorder. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 91, p. 197402, Nov 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.197402>>.
- DU, J.; LI, H.; XU, X.; SHI, M.; WU, J.; ZHOU, X.; HAN, R. Experimental implementation of the quantum random-walk algorithm. **Physical Review A**, APS, v. 67, n. 4, p. 042316, 2003.
- DUNLAP, D. H.; WU, H.; PHILLIPS, P. W. Absence of localization in a random-dimer model. **Physical Review Letters**, APS, v. 65, n. 1, p. 88, 1990.
- DÜR, W.; RAUSSENDORF, R.; KENDON, V. M.; BRIEGEL, H.-J. Quantum walks in optical lattices. **Physical Review A**, APS, v. 66, n. 5, p. 052319, 2002.
- EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. **Annalen der physik**, v. 4, 1905.
- EKERT, A. K. Quantum cryptography based on bell's theorem. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 67, p. 661–663, Aug 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.661>>.
- ENDO, T.; KONNO, N.; SEGAWA, E.; TAKEI, M. A one-dimensional hadamard walk with one defect. **arXiv preprint arXiv:1407.8103**, 2014.
- EVANGELOU, S.; KATSANOS, D. Super-diffusion in random chains with correlated disorder. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 164, n. 5-6, p. 456–464, 1992.
- FARHI, E.; GUTMANN, S. Quantum computation and decision trees. **Physical Review A**, APS, v. 58, n. 2, p. 915, 1998.
- FEYNMAN, R. P. Simulating physics with computers. **Int. J. Theor. Phys**, v. 21, n. 6/7, 1982.
- FEYNMAN, R. P. Quantum mechanical computers. **Optics News**, OSA, v. 11, n. 2, p. 11–20, Feb 1985. Disponível em: <<http://www.osa-opn.org/abstract.cfm?URI=on-11-2-11>>.
- FLOMENBOM, O.; VELONIA, K.; LOOS, D.; MASUO, S.; COTLET, M.; ENGELBORGHES, Y.; HOFKENS, J.; ROWAN, A. E.; NOLTE, R. J.; AUWERAER, M. Van der et al. Stretched exponential decay and correlations in the catalytic activity of fluctuating single lipase molecules. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 102, n. 7, p. 2368–2372, 2005.
- FLORES, J. Transport in models with correlated diagonal and off-diagonal disorder. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, v. 1, n. 44, p. 8471, 1989.
- FLORES, J.; HILKE, M. Absence of localization in disordered systems with local correlation. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 26, n. 24, p. L1255, 1993.
- FOX, C. G. Empirically derived relationships between fractal dimension and power law form frequency spectra. In: **Fractals in geophysics**. [S.l.]: Springer, 1989. p. 211–239.

FURSTENBERG, H.; KESTEN, H. Products of random matrices. **The Annals of Mathematical Statistics**, JSTOR, v. 31, n. 2, p. 457–469, 1960.

GABBIANI, F.; COX, S. J. **Mathematics for neuroscientists**. [S.l.]: Academic Press, 2017.

GETTRICK, M. M.; MISZCZAK, J. A. Quantum walks with memory on cycles. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 399, p. 163–170, 2014.

GODSIL, C.; GUO, K.; MYKLEBUST, T. G. Quantum walks on generalized quadrangles. **arXiv preprint arXiv:1511.01962**, 2015.

GOLD, J. I.; SHADLEN, M. N. The neural basis of decision making. **Annual review of neuroscience**, v. 30, 2007.

GREIS, N. P.; GREENSIDE, H. S. Implication of a power-law power-spectrum for self-affinity. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 44, p. 2324–2334, Aug 1991. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.44.2324>>.

GRINIASTY, M.; FISHMAN, S. Localization by pseudorandom potentials in one dimension. **Physical review letters**, APS, v. 60, n. 13, p. 1334, 1988.

GROVER, L. K. Quantum computers can search arbitrarily large databases by a single query. **Physical review letters**, APS, v. 79, n. 23, p. 4709, 1997.

GROVER, L. K. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. **Physical review letters**, APS, v. 79, n. 2, p. 325, 1997.

HEINRICHS, J. Localization, antilocalization, and delocalization in one-dimensional disordered lattices. **Physical Review B**, APS, v. 51, n. 9, p. 5699, 1995.

HERRMAN, R.; HUMBLE, T. S. Continuous-time quantum walks on dynamic graphs. **Physical Review A**, APS, v. 100, n. 1, p. 012306, 2019.

HIGUCHI, T. Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 31, n. 2, p. 277–283, 1988. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278988900814>>.

HIGUCHI, T. Relationship between the fractal dimension and the power law index for a time series: A numerical investigation. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 46, n. 2, p. 254–264, 1990. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016727899090039R>>.

HILKE, M. Local correlations in one-and two-dimensional disordered systems. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 27, n. 14, p. 4773, 1994.

HILLERY, M.; REITZNER, D.; BUŽEK, V. Searching via walking: How to find a marked clique of a complete graph using quantum walks. **Physical Review A**, APS, v. 81, n. 6, p. 062324, 2010.

HUMPHRIES, N. E.; QUEIROZ, N.; DYER, J. R.; PADE, N. G.; MUSYL, M. K.; SCHAEFER, K. M.; FULLER, D. W.; BRUNNSCHWEILER, J. M.; DOYLE, T. K.; HOUGHTON, J. D. et al. Environmental context explains lévy and brownian movement patterns of marine predators. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 465, n. 7301, p. 1066–1069, 2010.

ITAKURA, Y. K. Quantum algorithm for commutativity testing of a matrix set. **arXiv preprint quant-ph/0509206**, 2005.

IZRAILEV, F. M.; KROKHIN, A. A.; MAKAROV, N. Anomalous localization in low-dimensional systems with correlated disorder. **Physics Reports**, Elsevier, v. 512, n. 3, p. 125–254, 2012.

JACKSON, S. R.; KHOO, T. J.; STRAUCH, F. W. Quantum walks on trees with disorder: decay, diffusion, and localization. **Physical Review A**, APS, v. 86, n. 2, p. 022335, 2012.

JOHNSTON, D. C. Stretched exponential relaxation arising from a continuous sum of exponential decays. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 74, p. 184430, Nov 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.74.184430>>.

JONES, J. A.; MOSCA, M. Implementation of a quantum algorithm on a nuclear magnetic resonance quantum computer. **The Journal of chemical physics**, American Institute of Physics, v. 109, n. 5, p. 1648–1653, 1998.

KAKALIOS, J.; STREET, R.; JACKSON, n. W. Stretched-exponential relaxation arising from dispersive diffusion of hydrogen in amorphous silicon. **Physical review letters**, APS, v. 59, n. 9, p. 1037, 1987.

KAMINSKY, W. M.; LLOYD, S. Scalable architecture for adiabatic quantum computing of np-hard problems. **Quantum computing and quantum bits in mesoscopic systems**, Springer, p. 229–236, 2004.

KEMPE, J. Quantum random walks: an introductory overview. **Contemporary Physics**, Taylor & Francis, v. 44, n. 4, p. 307–327, 2003.

KENDON, V. Decoherence in quantum walks—a review. **Mathematical structures in computer science**, Cambridge University Press, v. 17, n. 6, p. 1169–1220, 2007.

KIELPINSKI, D.; MONROE, C.; WINELAND, D. J. Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 417, n. 6890, p. 709–711, 2002.

KIRKENGEM, M.; BERGLI, J. Slow relaxation and equilibrium dynamics in a two-dimensional coulomb glass: Demonstration of stretched exponential energy correlations. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 79, p. 075205, Feb 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.79.075205>>.

KITTEL, C. **Introduction to solid state physics. Fifth edition.** 1976.

KONNO, N. A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, The Mathematical Society of Japan, v. 57, n. 4, p. 1179–1195, 2005.

KONNO, N.; PORTUGAL, R.; SATO, I.; SEGAWA, E. Partition-based discrete-time quantum walks. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 17, n. 4, p. 100, 2018.

KRAMER, B.; MACKINNON, A. Localization: theory and experiment. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 56, n. 12, p. 1469–1564, dec 1993. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0034-4885/56/12/001>>.

KROVI, H.; BRUN, T. A. Hitting time for quantum walks on the hypercube. **Physical Review A**, APS, v. 73, n. 3, p. 032341, 2006.

KUHL, U.; IZRAILEV, F.; KROKHIN, A.; STÖCKMANN, H.-J. Experimental observation of the mobility edge in a waveguide with correlated disorder. **Applied Physics Letters**, American Institute of Physics, v. 77, n. 5, p. 633–635, 2000.

LAHERRERE, J.; SORNETTE, D. Stretched exponential distributions in nature and economy: “fat tails” with characteristic scales. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, Springer, v. 2, n. 4, p. 525–539, 1998.

LAKSHMINARAYAN, A. What is random about a quantum random walk? **arXiv preprint quant-ph/0305026**, 2003.

LAVARDA, F. C.; SANTOS, M. D.; GALVAO, D.; LAKS, B. Near resonant scattering from nonsymmetric dimers: Applications to substituted polyanilines. **Physical review letters**, APS, v. 73, n. 9, p. 1267, 1994.

LI, D.; LIU, Y.; YANG, Y.-G.; XU, J.; YUAN, J.-B. Szegedy quantum walks with memory on regular graphs. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 19, n. 1, p. 32, 2020.

LI, X.; CHEN, H.; RUAN, Y.; LIU, Z.; XU, M.; TAN, J. Spatial search for a general multi-vertex state on graph by continuous-time quantum walks. **arXiv preprint arXiv:1804.03042**, 2018.

LIFSHITS, I.; GREDESKUL, S. A.; PASTUR, L. A. **Introduction to the theory of disordered systems**. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1988.

LIMA, R. P. A.; LYRA, M. L.; NASCIMENTO, E. M.; JESUS, A. D. de. Magnon delocalization in ferromagnetic chains with long-range correlated disorder. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 65, p. 104416, Feb 2002. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.65.104416>>.

LINDEN, N.; POPESCU, S. Good dynamics versus bad kinematics: Is entanglement needed for quantum computation? **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 87, p. 047901, Jul 2001. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.047901>>.

LIU, Y.; YUAN, J.; DUAN, B.; LI, D. Quantum walks on regular uniform hypergraphs. **Scientific reports**, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1–8, 2018.

LORENZO, S.; APOLLARO, T. J. G.; SINDONA, A.; PLASTINA, F. Quantum-state transfer via resonant tunneling through local-field-induced barriers. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 87, p. 042313, Apr 2013. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.87.042313>>.

LYAKHOV, A.; BRUDER, C. Quantum state transfer in arrays of flux qubits. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 7, p. 181–181, aug 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/181>>.

LYAKHOV, A. O.; BRUDER, C. Use of dynamical coupling for improved quantum state transfer. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 74, p. 235303, Dec 2006. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.74.235303>>.

MACKAY, T. D.; BARTLETT, S. D.; STEPHENSON, L. T.; SANDERS, B. C. Quantum walks in higher dimensions. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, IOP Publishing, v. 35, n. 12, p. 2745, 2002.

MAGNIEZ, F.; NAYAK, A.; RICHTER, P. C.; SANTHA, M. On the hitting times of quantum versus random walks. **Algorithmica**, Springer, v. 63, n. 1-2, p. 91–116, 2012.

MAGNIEZ, F.; NAYAK, A.; ROLAND, J.; SANTHA, M. Search via quantum walk. **SIAM journal on computing**, SIAM, v. 40, n. 1, p. 142–164, 2011.

MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature, Primeira edição**. [S.l.]: New York, Freeman, 1983.

MANDELBROT, B. B.; NESS, J. W. V. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. **SIAM review**, SIAM, v. 10, n. 4, p. 422–437, 1968.

MANDELBROT, B. B.; WALLIS, J. R. Computer experiments with fractional gaussian noises: Part 1, averages and variances. **Water resources research**, Wiley Online Library, v. 5, n. 1, p. 228–241, 1969.

MASUDA, N.; PORTER, M. A.; LAMBIOTTE, R. Random walks and diffusion on networks. **Physics reports**, Elsevier, v. 716, p. 1–58, 2017.

MENDES, C.; ALMEIDA, G.; LYRA, M.; de Moura, F. Localization properties of a discrete-time 1d quantum walk with generalized exponential correlated disorder. **Physics Letters A**, v. 394, p. 127196, 2021. ISSN 0375-9601. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375960121000608>>.

MENDES, C. V. C.; ALMEIDA, G. M. A.; LYRA, M. L.; MOURA, F. A. B. F. de. Localization-delocalization transition in discrete-time quantum walks with long-range correlated disorder. **Phys. Rev. E**, American Physical Society, v. 99, p. 022117, Feb 2019. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.99.022117>>.

MESSIAS, D.; MENDES, C.; ALMEIDA, G.; LYRA, M.; de Moura, F. Rabi-like quantum communication in an aperiodic spin-1/2 chain. **Journal of Magnetism and Magnetic Materials**, v. 505, p. 166730, 2020. ISSN 0304-8853. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304885319338958>>.

MIN, Y.; WANG, K. Continuous-time quantum walk on penrose lattice. **arXiv preprint arXiv:1611.05160**, 2016.

MOLFETTA, G. D.; SOARES-PINTO, D. O.; QUEIRÓS, S. M. D. Elephant quantum walk. **Physical Review A**, APS, v. 97, n. 6, p. 062112, 2018.

MONTEIRO, V. M. **Passeios aleatórios do elefante: efeitos de memória no caso multidimensional**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.

MOQADAM, J. K.; OLIVEIRA, M. C. de; PORTUGAL, R. Staggered quantum walks with superconducting microwave resonators. **Physical Review B**, APS, v. 95, n. 14, p. 144506, 2017.

MOURA, F. A. B. F. de; LYRA, M. L. Delocalization in the 1d anderson model with long-range correlated disorder. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 81, p. 3735–3738, Oct 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.3735>>.

MOURA, F. A. D.; LYRA, M. L. Delocalization in the 1d anderson model with long-range correlated disorder. **Physical Review Letters**, APS, v. 81, n. 17, p. 3735, 1998.

MOURA, F. de; DUTRA, R.; SANTOS, D.; MENDES, C. **Elementos da Teoria de Localização de Anderson**. [S.l.]: Amazon, 2020.

MÜLKEN, O.; BIERBAUM, V.; BLUMEN, A. Coherent exciton transport in dendrimers and continuous-time quantum walks. **The Journal of chemical physics**, American Institute of Physics, v. 124, n. 12, p. 124905, 2006.

MÜLKEN, O.; BLUMEN, A.; AMTHOR, T.; GIESE, C.; REETZ-LAMOUR, M.; WEIDEMÜLLER, M. Survival probabilities in coherent exciton transfer with trapping. **Physical review letters**, APS, v. 99, n. 9, p. 090601, 2007.

NAETHER, U.; STÜTZER, S.; VICENCIO, R.; MOLINA, M.; TÜNNERMANN, A.; NOLTE, S.; KOTTOS, T.; CHRISTODOULIDES, D.; SZAMEIT, A. Experimental observation of superdiffusive transport in random dimer lattices. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 15, n. 1, p. 013045, 2013.

NICOLA, F. D.; SANSONI, L.; CRESPI, A.; RAMPONI, R.; OSELLAME, R.; GIOVANNETTI, V.; FAZIO, R.; MATALONI, P.; SCIARRINO, F. Quantum simulation of bosonic-fermionic noninteracting particles in disordered systems via a quantum walk. **Physical Review A**, APS, v. 89, n. 3, p. 032322, 2014.

NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. **Quantum computation and quantum information**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 2002.

NIKOLOPOULOS, G. M.; PETROSYAN, D.; LAMBROPOULOS, P. Coherent electron wavepacket propagation and entanglement in array of coupled quantum dots. **Europhysics Letters (EPL)**, IOP Publishing, v. 65, n. 3, p. 297–303, feb 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209/epl/i2003-10100-9>>.

NORRIS, J. R. **Markov chains**. [S.l.]: Cambridge university press, 1998.

O'BRIEN, J. L.; PRYDE, G. J.; WHITE, A. G.; RALPH, T. C.; BRANNING, D. Demonstration of an all-optical quantum controlled-not gate. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 426, n. 6964, p. 264–267, 2003.

OBUSE, H.; KAWAKAMI, N. Topological phases and delocalization of quantum walks in random environments. **Physical Review B**, APS, v. 84, n. 19, p. 195139, 2011.

OKUBO, A.; LEVIN, S. A. **Diffusion and ecological problems: modern perspectives**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 14.

OSBORNE, A.; PROVENZALE, A. Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 35, n. 3, p. 357–381, 1989. ISSN 0167-2789. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278989900754>>.

PACZUSKI, M.; MASLOV, S.; BAK, P. Avalanche dynamics in evolution, growth, and depinning models. **Physical Review E**, APS, v. 53, n. 1, p. 414, 1996.

PEARSON, K. The problem of the random walk. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 72, n. 1867, p. 342–342, 1905.

PERETS, H. B.; LAHINI, Y.; POZZI, F.; SOREL, M.; MORANDOTTI, R.; SILBERBERG, Y. Realization of quantum walks with negligible decoherence in waveguide lattices. **Physical review letters**, APS, v. 100, n. 17, p. 170506, 2008.

PHILLIPS, J. Stretched exponential relaxation in molecular and electronic glasses. **Reports on Progress in Physics**, IOP Publishing, v. 59, n. 9, p. 1133, 1996.

- PITTMAN, T. B.; FITCH, M. J.; JACOBS, B. C.; FRANSON, J. D. Experimental controlled-not logic gate for single photons in the coincidence basis. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 68, p. 032316, Sep 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.032316>>.
- PLENIO, M. B.; SEMIÃO, F. L. High efficiency transfer of quantum information and multiparticle entanglement generation in translation-invariant quantum chains. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 7, p. 73–73, mar 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1367-2630/7/1/073>>.
- PORTUGAL, R. Establishing the equivalence between szegedy's and coined quantum walks using the staggered model. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 15, n. 4, p. 1387–1409, 2016.
- PORTUGAL, R. Staggered quantum walks on graphs. **Physical Review A**, APS, v. 93, n. 6, p. 062335, 2016.
- PORTUGAL, R. **Quantum walks and search algorithms**. [S.l.]: Springer, 2018.
- PORTUGAL, R.; FERNANDES, T. D. Quantum search on the two-dimensional lattice using the staggered model with hamiltonians. **Physical Review A**, APS, v. 95, n. 4, p. 042341, 2017.
- PORTUGAL, R.; OLIVEIRA, M. C. de; MOQADAM, J. K. Staggered quantum walks with hamiltonians. **Physical Review A**, APS, v. 95, n. 1, p. 012328, 2017.
- PORTUGAL, R.; SANTOS, R. A.; FERNANDES, T. D.; GONÇALVES, D. N. The staggered quantum walk model. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 15, n. 1, p. 85–101, 2016.
- PORTUGAL, R.; SEGAWA, E. Connecting coined quantum walks with szegedy's model. **Interdisciplinary Information Sciences**, The Editorial Committee of the Interdisciplinary Information Sciences, v. 23, n. 1, p. 119–125, 2017.
- QIANG, X.; LOKE, T.; MONTANARO, A.; AUNGSKUNSIRI, K.; ZHOU, X.; O'BRIEN, J. L.; WANG, J. B.; MATTHEWS, J. C. Efficient quantum walk on a quantum processor. **Nature communications**, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–6, 2016.
- RAKOVŠZKY, T.; ASBOTH, J. K. Localization, delocalization, and topological phase transitions in the one-dimensional split-step quantum walk. **Physical Review A**, APS, v. 92, n. 5, p. 052311, 2015.
- RAZZOLI, L.; PARIS, M. G.; BORDONE, P. Transport efficiency of continuous-time quantum walks on graphs. **arXiv preprint arXiv:2011.13794**, 2020.
- REIF, F. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. [S.l.]: Waveland Press, 2009.
- REITZNER, D.; HILLERY, M.; FELDMAN, E.; BUŽEK, V. Quantum searches on highly symmetric graphs. **Physical Review A**, APS, v. 79, n. 1, p. 012323, 2009.
- RHODES, M. L.; WONG, T. G. Quantum walk search on the complete bipartite graph. **Physical Review A**, APS, v. 99, n. 3, p. 032301, 2019.
- RIBEIRO, P.; MILMAN, P.; MOSSERI, R. Aperiodic quantum random walks. **Physical review letters**, APS, v. 93, n. 19, p. 190503, 2004.

- ROHDE, P. P.; BRENNEN, G. K.; GILCHRIST, A. Quantum walks with memory-goldfish, elephants and wise old men. **arXiv preprint arXiv:1212.4540**, 2012.
- ROHDE, P. P.; BRENNEN, G. K.; GILCHRIST, A. Quantum walks with memory provided by recycled coins and a memory of the coin-flip history. **Physical Review A**, APS, v. 87, n. 5, p. 052302, 2013.
- ROLAND, J. ér émie; KROVI, H.; MAGNIEZ, F.; OZOLS, M. Finding is as easy as detecting for quantum walks. Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- ROMITO, A.; FAZIO, R.; BRUDER, C. Solid-state quantum communication with josephson arrays. **Phys. Rev. B**, American Physical Society, v. 71, p. 100501, Mar 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.71.100501>>.
- SADOWSKI, P.; PAWELA, Ł.; LEWANDOWSKA, P.; KUKULSKI, R. Quantum walks on hypergraphs. **International Journal of Theoretical Physics**, Springer, v. 58, n. 10, p. 3382–3393, 2019.
- SALES, M.; de Moura, F. Numerical study of the one-electron dynamics in one-dimensional systems with short-range correlated disorder. **Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures**, v. 45, p. 97 – 102, 2012. ISSN 1386-9477. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386947712002780>>.
- SALIMI, S. Continuous-time quantum walks on star graphs. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 324, n. 6, p. 1185–1193, 2009.
- SANDERS, B. C.; BARTLETT, S. D.; TREGENNA, B.; KNIGHT, P. L. Quantum quincunx in cavity quantum electrodynamics. **Physical Review A**, APS, v. 67, n. 4, p. 042305, 2003.
- SANSONI, L.; SCIARRINO, F.; VALLONE, G.; MATALONI, P.; CRESPI, A.; RAMPONI, R.; OSELLAME, R. Two-particle bosonic-fermionic quantum walk via integrated photonics. **Physical review letters**, APS, v. 108, n. 1, p. 010502, 2012.
- SANTOS, I. F. dos; MOURA, F. A. B. F. de; LYRA, M. L.; COUTINHO-FILHO, M. D. Critical behavior of the two-dimensional anderson model with long-range correlated disorder. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, v. 19, n. 47, p. 476213, nov 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/0953-8984/19/47/476213>>.
- SARMA, S. D.; HE, S.; XIE, X. Mobility edge in a model one-dimensional potential. **Physical review letters**, APS, v. 61, n. 18, p. 2144, 1988.
- SCHREIBER, A.; CASSEMIRO, K.; POTOČEK, V.; GÁBRIS, A.; JEX, I.; SILBERHORN, C. Decoherence and disorder in quantum walks: from ballistic spread to localization. **Physical review letters**, APS, v. 106, n. 18, p. 180403, 2011.
- SCHREIBER, A.; GÁBRIS, A.; ROHDE, P. P.; LAIHO, K.; ŠTEFAŇÁK, M.; POTOČEK, V.; HAMILTON, C.; JEX, I.; SILBERHORN, C. A 2d quantum walk simulation of two-particle dynamics. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 336, n. 6077, p. 55–58, 2012.
- SHENVI, N.; KEMPE, J.; WHALEY, K. B. Quantum random-walk search algorithm. **Physical Review A**, APS, v. 67, n. 5, p. 052307, 2003.

SHI, T.; LI, Y.; SONG, Z.; SUN, C.-P. Quantum-state transfer via the ferromagnetic chain in a spatially modulated field. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 71, p. 032309, Mar 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.71.032309>>.

SHIKANO, Y.; WADA, T.; HORIKAWA, J. Discrete-time quantum walk with feed-forward quantum coin. **Scientific reports**, Nature Publishing Group, v. 4, p. 4427, 2014.

SHOR, P. W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 52, p. R2493–R2496, Oct 1995. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.R2493>>.

SHOR, P. W. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. **SIAM review**, SIAM, v. 41, n. 2, p. 303–332, 1999.

SILVA, L. da; NETO, A. R.; SALES, M.; LYRA, M.; MOURA, F. de. Optical absorption and delocalization in a quaternary tight-binding chain with correlated disorder. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, Elsevier, v. 486, p. 895–900, 2017.

SKINNER, A. J.; DAVENPORT, M. E.; KANE, B. E. Hydrogenic spin quantum computing in silicon: A digital approach. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 90, p. 087901, Feb 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.90.087901>>.

SOLENOV, D.; FEDICHKIN, L. Continuous-time quantum walks on a cycle graph. **Physical Review A**, APS, v. 73, n. 1, p. 012313, 2006.

SPITZER, F. **Principles of random walk**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 34.

SZEGEDY, M. Quantum speed-up of markov chain based algorithms. In: IEEE. **45th Annual IEEE symposium on foundations of computer science**. [S.l.], 2004. p. 32–41.

THOULESS, D. Electrons in disordered systems and the theory of localization. **Physics Reports**, v. 13, n. 3, p. 93 – 142, 1974. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157374900295>>.

THOULESS, D. Localization by a potential with slowly varying period. **Physical review letters**, APS, v. 61, n. 18, p. 2141, 1988.

TÖDTLI, B.; LANER, M.; SEMENOV, J.; PAOLI, B.; BLATTNER, M.; KUNEGIS, J. Continuous-time quantum walks on directed bipartite graphs. **Physical Review A**, APS, v. 94, n. 5, p. 052338, 2016.

TSONIS, A. A. **Chaos—from theory to applications** plenum press. **New York**, 1992.

TUCKWELL, H. C. **Introduction to theoretical neurobiology: volume 2, nonlinear and stochastic theories**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1988. v. 8.

USHER, M.; MCCLELLAND, J. L. The time course of perceptual choice: the leaky, competing accumulator model. **Psychological review**, American Psychological Association, v. 108, n. 3, p. 550, 2001.

VAKULCHYK, I.; FISTUL, M. V.; QIN, P.; FLACH, S. Anderson localization in generalized discrete-time quantum walks. **Physical Review B**, APS, v. 96, n. 14, p. 144204, 2017.

VANDERSYPEN, L. M.; STEFFEN, M.; BREYTA, G.; YANNONI, C. S.; SHERWOOD, M. H.; CHUANG, I. L. Experimental realization of shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 414, n. 6866, p. 883–887, 2001.

VENEGAS-ANDRACA, S. E. Quantum walks: a comprehensive review. **Quantum Information Processing**, Springer, v. 11, n. 5, p. 1015–1106, 2012.

VISWANATHAN, G. M.; BULDYREV, S. V.; HAVLIN, S.; LUZ, M. D.; RAPOSO, E.; STANLEY, H. E. Optimizing the success of random searches. **nature**, Nature Publishing Group, v. 401, n. 6756, p. 911–914, 1999.

WANG, J.; MANOUCHEHRI, K. **Physical implementation of quantum walks**. [S.l.]: Springer, 2013.

WANG, K.; SHI, Y.; XIAO, L.; WANG, J.; JOGLEKAR, Y. N.; XUE, P. Experimental realization of continuous-time quantum walks on directed graphs and their application in pagerank. **Optica**, Optical Society of America, v. 7, n. 11, p. 1524–1530, 2020.

WHITFIELD, J. D.; RODRÍGUEZ-ROSARIO, C. A.; ASPURU-GUZIK, A. Quantum stochastic walks: A generalization of classical random walks and quantum walks. **Physical Review A**, APS, v. 81, n. 2, p. 022323, 2010.

WÓJCIK, A.; ŁUCZAK, T.; KURZYŃSKI, P.; GRUDKA, A.; GDALA, T.; BEDNARSKA, M. Unmodulated spin chains as universal quantum wires. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 72, p. 034303, Sep 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.72.034303>>.

WOJCIK, A.; ŁUCZAK, T.; KURZYŃSKI, P.; GRUDKA, A.; GDALA, T.; BEDNARSKA, M. Multiuser quantum communication networks. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 75, p. 022330, Feb 2007. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.75.022330>>.

WÓJCIK, A.; LUCZAK, T.; KURZYŃSKI, P.; GRUDKA, A.; GDALA, T.; BEDNARSKA-BZDKEGA, M. Trapping a particle of a quantum walk on the line. **Physical Review A**, APS, v. 85, n. 1, p. 012329, 2012.

WONG, T. G. Quantum walk search on johnson graphs. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, v. 49, n. 19, p. 195303, 2016.

WONG, T. G.; WÜNSCHER, K.; LOCKHART, J.; SEVERINI, S. Quantum walk search on kronecker graphs. **Physical Review A**, APS, v. 98, n. 1, p. 012338, 2018.

WOOTERS, W.; ZUREK, W. Quantum no-cloning theorem. **Nature**, v. 299, p. 802, 1982.

WU, H.-L.; PHILLIPS, P. Polyaniline is a random-dimer model: A new transport mechanism for conducting polymers. **Physical review letters**, APS, v. 66, n. 10, p. 1366, 1991.

XU, S.; SUN, X.; WU, J.; ZHANG, W.-W.; ARSHED, N.; SANDERS, B. C. Quantum walk on a chimera graph. **New Journal of Physics**, IOP Publishing, v. 20, n. 5, p. 053039, 2018.

XU, X.-P.; ZHANG, X.-K.; IDE, Y.; KONNO, N. Analytical solutions for quantum walks on 1d chain with different shift operators. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 344, p. 194–212, 2014.

XUE, P.; ZHANG, R.; QIN, H.; ZHAN, X.; BIAN, Z.; LI, J. A one-dimensional quantum walk with multiple-rotation on the coin. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 6, n. 1, p. 1–5, 2016.

YAO, N. Y.; JIANG, L.; GORSHKOV, A. V.; GONG, Z.-X.; ZHAI, A.; DUAN, L.-M.; LUKIN, M. D. Robust quantum state transfer in random unpolarized spin chains. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 106, p. 040505, Jan 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.040505>>.

YU, Y.; WANG, M.; ZHANG, D.; WANG, B.; SANT, G.; BAUCHY, M. Stretched exponential relaxation of glasses at low temperature. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 115, p. 165901, Oct 2015. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.165901>>.

YU, Y.-K.; TAYLOR, P. L.; TERENTJEV, E. M. Exponential decay of correlations in a model for strongly disordered 2d nematic elastomers. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, v. 81, p. 128–131, Jul 1998. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.128>>.

ZALLEN, R. **The physics of amorphous solids**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.

ZENG, M.; YONG, E. H. Discrete-time quantum walk with phase disorder: localization and entanglement entropy. **Scientific reports**, Nature Publishing Group, v. 7, n. 1, p. 1–9, 2017.

ZHANG, P.; REN, X.-F.; ZOU, X.-B.; LIU, B.-H.; HUANG, Y.-F.; GUO, G.-C. Demonstration of one-dimensional quantum random walks using orbital angular momentum of photons. **Physical Review A**, APS, v. 75, n. 5, p. 052310, 2007.

ZHAO, Q.; GONG, J. From disordered quantum walk to physics of off-diagonal disorder. **Physical Review B**, APS, v. 92, n. 21, p. 214205, 2015.

ZWICK, A.; ÁLVAREZ, G. A.; STOLZE, J.; OSENDA, O. Robustness of spin-coupling distributions for perfect quantum state transfer. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 84, p. 022311, Aug 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.022311>>.

APÊNDICE A – Cálculo Fidelidade

Para iniciar o protocolo, Alice coloca um spin em um estado desconhecido no sítio em que se encontra s-ésimo na cadeia de spin:

$$|\psi_{in}\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \text{sen}\frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (127)$$

Bob quer recuperar este estado, ou um estado mais próximo possível na outra extremidade da cadeia. Para isso, deve-se esperar um tempo específico até que o estado inicial evolua para um estado final que seja mais próximo possível do eq.(127). O r-ésimo estado será, em geral, um estado misto e pode ser obtido aplicando o traço dos estados de todos os outros spins de $\langle\Psi|$. Isso evolui com o tempo:

$$\rho_{out}(t) = P(t) |\psi_{out}(t)\rangle \langle\psi_{out}(t)| + [1 - P(t)] |0\rangle \langle 0|, \quad (128)$$

com

$$|\psi_{out}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{P(t)}} \left(\cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \text{sen}\frac{\theta}{2} f_{s,r}^N(t) |1\rangle \right) \quad (129)$$

onde

$$P(t) = \cos^2\frac{\theta}{2} + \text{sen}^2\frac{\theta}{2} |f_{s,r}^N(t)|^2 \quad (130)$$

e

$$f_{s,r}^N(t) = \langle r | \exp\{-iH_G t\} | s \rangle \quad (131)$$

Agora suponha que Bob vai pegar o r-ésimo spin (e, portanto, completar o protocolo de comunicação) em um tempo predeterminado $t = t_0$. A fidelidade de comunicação quântica através da média sob todo o estado de entrada pura $|\psi_{in}\rangle$ na esfera de Bloch que é dada por:

$$F = \frac{1}{4\pi} \int \langle\psi_{in} | \rho_{out}(t_0) | \psi_{in}\rangle d\Omega \quad (132)$$

Resolvendo:

$$\langle\psi_{in} | \rho_{out}(t_0) | \psi_{in}\rangle = P(t_0) \langle\psi_{in} | \psi_{out}(t_0)\rangle \langle\psi_{out}(t_0) | \psi_{in}\rangle + \langle\psi_{in} | [1 - P(t_0)] | 0\rangle \langle 0 | \psi_{in}\rangle$$

$$\langle\psi_{in} | \rho_{out}(t_0) | \psi_{in}\rangle = P(t_0) \langle\psi_{in} | \psi_{out}(t_0)\rangle \langle\psi_{out}(t_0) | \psi_{in}\rangle + \langle\psi_{in} | 0\rangle \langle 0 | \psi_{in}\rangle - P(t_0) \langle\psi_{in} | 0\rangle \langle 0 | \psi_{in}\rangle$$

Vamos separar a equação em três partes:

$$(1) = P(t_0) \langle \psi_{in} | \psi_{out}(t_0) \rangle \langle \psi_{out}(t_0) | \psi_{in} \rangle \quad (133)$$

$$(2) = \langle \psi_{in} | 0 \rangle \langle 0 | \psi_{in} \rangle \quad (134)$$

$$(3) = -P(t_0) \langle \psi_{in} | 0 \rangle \langle 0 | \psi_{in} \rangle \quad (135)$$

Façamos agora as contas separadamente:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{in} | \psi_{out}(t_0) \rangle &= \left[\cos \frac{\theta}{2} \langle 0 | + e^{-i\phi} \text{sen} \frac{\theta}{2} \langle 1 | \right] \frac{1}{\sqrt{P(t_0)}} \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \text{sen} \frac{\theta}{2} f_{r,s}^N(t_0) |1\rangle \right) \\ \langle \psi_{in} | \psi_{out}(t_0) \rangle &= \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^N(t_0) \right] \frac{1}{\sqrt{P(t_0)}} \end{aligned} \quad (136)$$

E também:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{out}(t_0) | \psi_{in} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{P(t_0)}} \left(\cos \frac{\theta}{2} \langle 0 | + e^{-i\phi} \text{sen} \frac{\theta}{2} (f_{r,s}^N(t_0))^* \langle 1 | \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \text{sen} \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \\ \langle \psi_{out}(t_0) | \psi_{in} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{P(t_0)}} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} (f_{r,s}^N(t_0))^* \right] \end{aligned} \quad (137)$$

Assim, teremos:

$$(1) = \cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} (f_{r,s}^N(t_0))^* + \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^N(t_0) + \text{sen}^4 \frac{\theta}{2} |f_{r,s}^N(t_0)|^2 \quad (138)$$

$$(2) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (139)$$

$$(3) = -P(t_0) \cos^2 \frac{\theta}{2} = -\cos^4 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} |f_{r,s}^N(t_0)|^2 \quad (140)$$

Com essas expressões, podemos então resolver e calcular a fidelidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \langle \psi_{in} | \rho_{out} | \psi_{in} \rangle d\Omega &= \frac{1}{4\pi} \int \cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} (f_{r,s}^N(t_0))^* + \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^N(t_0) + \\ &+ \text{sen}^4 \frac{\theta}{2} |f_{r,s}^N(t_0)|^2 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^4 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} |f_{r,s}^N(t_0)|^2 d\Omega \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{sen}\theta d\theta d\phi$$

Como não há dependência em ϕ teremos que a integral vale 2π , restando apenas a integral em θ :

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{sen} \theta (f_{r,s}^N(t_0))^* + \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{sen} \theta f_{r,s}^N(t_0) + \\
&+ \text{sen}^4 \frac{\theta}{2} \text{sen} \theta |f_{r,s}^N(t_0)|^2 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen} \theta - \cos^2 \frac{\theta}{2} \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \text{sen} \theta |f_{r,s}^N(t_0)|^2 d\theta
\end{aligned} \tag{141}$$

Usando o Wolfram Alpha para resolver as integrais, ficamos com:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (f_{r,s}^N(t_0))^* + \frac{1}{3} f_{r,s}^N(t_0) + \frac{2}{3} |f_{r,s}^N(t_0)|^2 + 1 - \frac{1}{3} |f_{r,s}^N(t_0)|^2 \right] \\
&= \frac{1}{6} [f_{r,s}^N + (f_{r,s}^N(t_0))^*] + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} |f_{r,s}^N(t_0)|^2
\end{aligned} \tag{142}$$

Vamos focar nossas atenções agora no primeiro termo:

$$\Delta = |f_{r,s}^N(t_0)| e^{i*\arg(f_{r,s}^N(t_0))} + |f_{r,s}^N(t_0)| e^{-i*\arg(f_{r,s}^N(t_0))} = |f_{r,s}^N(t_0)| \left[e^{i*\arg(f_{r,s}^N(t_0))} + e^{-i*\arg(f_{r,s}^N(t_0))} \right]$$

$$\Delta = 2 |f_{r,s}^N(t_0)| \cos(\arg(f_{r,s}^N(t_0))) \tag{143}$$

Logo:

$$\frac{1}{4\pi} \int \langle \psi_{in} | \rho_{out} | \psi_{in} \rangle d\Omega = F = \frac{1}{3} |f_{r,s}^N(t_0)| \cos(\arg(f_{r,s}^N(t_0))) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} |f_{r,s}^N(t_0)|^2$$

Ou então:

$$F = \frac{1}{3} |f_{r,s}^N(t_0)| \cos(\gamma) + \frac{1}{6} |f_{r,s}^N(t_0)|^2 + \frac{1}{2} \tag{144}$$

onde $\gamma = \arg [f_{r,s}^N(t_0)]$.

APÊNDICE B – Artigos Publicados



Contents lists available at ScienceDirect

Annals of Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/aop

Localization properties and high-fidelity state transfer in hopping models with correlated disorder

G.M.A. Almeida^{*}, C.V.C. Mendes, M.L. Lyra, F.A.B.F. de Moura*Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió AL 57072-970, Brazil*

ARTICLE INFO

Article history:

Received 30 November 2017

Accepted 3 September 2018

Available online 6 September 2018

Keywords:

Correlated disorder

Localization

Quantum-state transfer

ABSTRACT

We investigate a tight-binding chain featuring diagonal and off-diagonal disorder, these being modeled through the long-range-correlated fractional Brownian motion. Particularly, by employing exact diagonalization methods, we evaluate how the eigenstate spectrum of the system and how its related single-particle dynamics respond to both competing sources of disorder. Moreover, we report the possibility of carrying out efficient end-to-end quantum-state transfer protocols even in the presence of such generalized disorder due to the appearance of extended states around the middle of the band in the limit of strong correlations.

© 2018 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

In the past few decades, there has been a growing interest in investigating quantum transport properties of low dimensional disordered lattices [1–16], most of them based on Anderson scaling theory. In general lines, it is well established that there are no extended eigenstates in low-dimensional systems for any amount of uncorrelated disorder. The breakdown of standard Anderson localization theory was put forward about thirty years ago by Flores and Dunlap [17,18]. They pointed out that the presence of short-range correlations in the disorder distribution yielded the appearance of extended states in the spectrum of disordered chains. That could explain to a great extent some unusual transport properties of several types of polymers [17,18]. Right after this discovery, a handful of works came along to investigate the role of disorder correlations, either short- or long-ranged, in a wide variety of physical systems [19–40]. Particularly, it was shown in

^{*} Corresponding author.

E-mail address: dealmeidagma@gmail.com (G.M.A. Almeida).

Refs. [19,21] that long-range correlated random potentials can actually allow for mobility edges in 1D disordered models. In Ref. [19], that specific kind of fluctuations was generated using the trace of a fractional Brownian motion whose intrinsic correlations decay following a power-law. Through numerical renormalization methods, it was shown that this model exhibits a phase of extended states around the center of the band [19]. Tackling the same problem, the authors in [21] applied an analytical perturbation technique and came up with a direct relationship between the localization length and the characteristics of the intrinsic correlations in the disorder distribution. A few years later, the above results were validated through experiments carried out in microwave guides featuring correlated scatters [41]. The authors demonstrated that intrinsic long-range correlations within the scatters distribution ultimately improve the wave transmission. On the theoretical side, the Anderson model with long-range correlated hopping fluctuations (off-diagonal disorder) was studied in Refs. [20,32]. Likewise, it was found that strong correlations promote the appearance of a phase of extended states close to the center of the band.

In this work we provide further progress along those lines. In particular, we consider two sources of disorder acting simultaneously on the potentials as well as on the hopping strengths of the chain, both exhibiting long-range correlated fluctuations generated by the fractional Brownian motion. This model embodies a generalized disordered scenario which we aim to push on its capability of supporting extended states in the middle of the band thereby weakening Anderson localization. By looking at the participation ratio of eigenstates and also at the dynamics of the system through its mean square displacement for a delta-like initial state we find out that the chain allows for propagating modes if substantial long-range correlations are taking place in both sources of disorder. Looking forward possible applications in the field of quantum-information processing, we also investigate whether such a model of generalized disorder would allow for realizing standard quantum-state transfer protocols [42–49], particularly those relying on weak-coupled parties [44–46,48]. The point is that when designing chains for transmitting quantum states from one point to another – which is a crucial requirement in quantum networks [50] – one should take into account the possibility of undesired fluctuations taking place due to experimental errors [40,46,51–58], that including correlated noise [40,51,52,58]. Our calculations reveal that an electron (or a properly encoded qubit) can be almost fully transferred through the noisy bulk of the chain depending upon specific sets of parameters.

2. Model and formalism

We consider a N -site linear chain described by the electronic tight-binding Hamiltonian ($\hbar = 1$)

$$H = \sum_{n=1}^N \epsilon_n |n\rangle \langle n| + \sum_{n=1}^{N-1} J_n (|n\rangle \langle n+1| + \text{h.c.}), \quad (1)$$

written in the Wannier basis set $\{|n\rangle\}$ accounting for the electron position, where ϵ_n is the on-site potential and J_n is the hopping strength, those being the source of static disorder. Those parameters are here expressed in terms of energy unit $J \equiv 1$. Specifically, we assume that both quantities fluctuate such that their corresponding disorder distributions come with intrinsic long-range correlations modeled via the fractional Brownian motion [19,22,24,25]

$$\epsilon_n, J_n = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{k^{\gamma/2}} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k\right). \quad (2)$$

We emphasize that the sequence generated by the equation above exhibits a power-law spectrum $1/k^\gamma$ and ϕ_k represents a random phase uniformly distributed within the range $[0, 2\pi]$. For $\gamma = 0$, the sequence is fairly uncorrelated. On the other hand, $\gamma > 0$ brings about long-range correlations in the disorder sequence. Therefore, exponent γ stands out as a very important parameter since it controls the *degree* of correlations within the disordered sequence. Hereafter, Eq. (2) will be used for generating disorder distributions for both ϵ_n and J_n but with a few remarks: (i) for ϵ_n we attribute $\gamma \rightarrow \alpha$ and normalize the entire sequence so that $\langle \epsilon_n \rangle = 0$ and $\langle \epsilon_n^2 \rangle = 1$; (ii) for J_n we set $\gamma \rightarrow \beta$ and

redefine $J_n \rightarrow \tanh(J_n) + 2$ after normalization in order to rule out possible null hopping strengths. It is also important to note that each sequence for ϵ_n and J_n is generated using distinct sets of phases, $\{\phi_k\}$. In summary, the model contains two *independent* parameters α and β that account for the degree of correlations for both diagonal and off-diagonal sources of disorder.

The quantities of interest are all obtained through exact diagonalization of Hamiltonian (1) which gives us the eigenvalues $\{E_j\}$ and its corresponding eigenvectors $|\psi^j\rangle = f_n^j|n\rangle$. Our first task will be evaluating the participation ratio defined as [24]

$$\xi^j = \frac{1}{\sum_n |f_n^j|^4}. \quad (3)$$

This measure provides an estimate of the number of bare states a given eigenstate is spread on, i.e., it quantifies the degree of localization. In particular, the participation number becomes size-independent for localized wave-packets and diverges with N for extended ones. In addition, we investigate the electronic time evolution through the chain. We initialize the initial wave-packet in $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n(0)|n\rangle$ where $c_n(0) = \delta_{n,n_0}$. The electronic state at time t can thus be obtained from $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle$, where

$$c_n(t) = \sum_j f_{n_0}^j f_n^j e^{-iE_j t}. \quad (4)$$

By using the relations above we can compute the width σ of the electronic wave-packet through [59]

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n (n - \langle n(t) \rangle)^2 |c_n(t)|^2}, \quad (5)$$

where $\langle n(t) \rangle = \sum_n n |c_n(t)|^2$ is the electronic average position. Note that $\sigma(t)$ goes from 0, for a wave function confined to a single site, to $O(N)$ for a wave extended over the whole system. Note that we can also compute the time-dependent participation number defined as $\xi(t) = 1/\sum_n |c_n(t)|^4$. Both quantities are distinct ways to obtain an estimate of the size of the wave-packet at time t [24,59].

3. Results

After having introduced the main tools in the previous section, we now provide a detailed investigation of the actual role played by diagonal and off-diagonal sources of disorder acting simultaneously in the chain.

3.1. Localization properties

We start our analysis showing results for the participation ratio of the entire eigenstates set. It should be emphasized that every quantity evaluated in this work was properly averaged over many distinct realizations of disorder. The total number of eigenstates $N_E = NM$ was larger than 10^5 for all calculations, M being the number of samples. We averaged ξ^j over a small window around energy E and therefore we are looking towards the quantity $\xi(E) = (\sum_{E_j < E + \Delta E}^{E_j > E - \Delta E} \xi^j) / n(E)$, where $n(E)$ is the number of eigenvalues $\{E_j\}$ within the interval $[E - \Delta E, E + \Delta E]$. Herein we fix $\Delta E = 0.2$ which was chosen much smaller than the total bandwidth but large enough to contain a large number of eigenstates to produce a good statistical average.

In Fig. 1(a)–(c) we plot the rescaled mean participation number ξ/N versus energy E for many combinations of α and β . Calculations were done for $N = 1000$ up to 8000 sites. We observe in Fig. 1(a) and (b) that ξ/N decreases as the system size N is increased regardless of the E value. That is a clear signature that all eigenstates become localized in the thermodynamic limit. On the other hand, Fig. 1(c) reveals a rather interesting behavior. Close to the band center, the rescaled participation number remains constant thus indicating the appearance of extended states at this region. For $|E| \gg 0$ we observe that ξ/N decreases slowly with N what indicates the presence of localized states far from the band center. However, these localized states are not size independent,

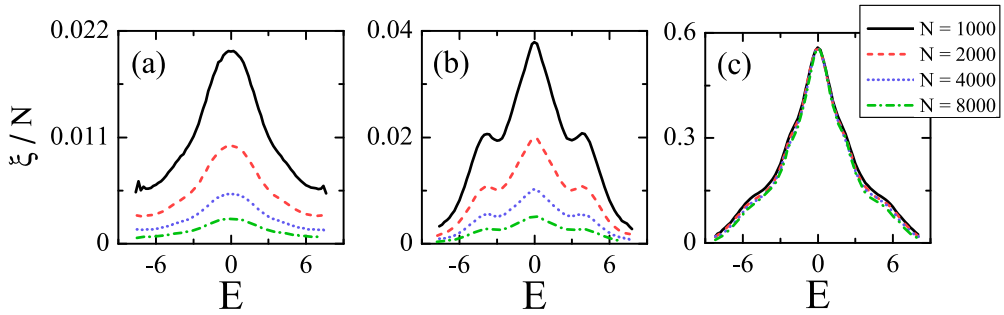


Fig. 1. Rescaled participation number ξ/N versus E for (a) $\alpha = 3, \beta = 0$; (b) $\alpha = 0, \beta = 3$; and (c) $\alpha = 3, \beta = 3$ for several system sizes. Notice that for $\alpha = \beta = 3$ delocalized states appear near the band center.

as it is usual in systems with uncorrelated disorder. They depict a sub-linear scaling due to the size-dependent rescaling of the coupling constants [60]. The size dependence of the participation number for some typical energies is shown in Fig. 2(a). In order to clearly locate the mobility edges in the case of strong disorder, the normalized localization length L/N is a more appropriate measure. The localization length L was obtained using a standard transfer matrix formalism (cf. Ref. [2] for details). Even in the regime of weak localization with power-law growth of the participation number, the localization length remains finite because it is mainly associated with the behavior of the eigenstates on their exponentially decaying tails. In Fig. 2(b) we report the spectrum of the normalized localization length for $\alpha = \beta = 3$ which clearly signals the mobility edges. Thereby, our calculations show that one-dimensional systems featuring both diagonal and off-diagonal disorder only display extended states whenever both sources of fluctuations are augmented with strong long-range correlations. If only either α or β is greater than zero, the electron transport can be suppressed by the presence of uncorrelated randomness in the lattice.

We can further observe that feature by analyzing Fig. 3, where we plot the mean participation number around the band center $\xi_0/N \equiv \xi(E \approx 0)/N$ versus α and β for $N = 8000$. We note that only for α and β larger than 2 we obtain the rescaled participation number $\xi_0/N \approx 0.58(2)$ which is very close to the corresponding value of extended states in ordered chains with open-boundary conditions, that is $2/3$. Our outcomes are also in agreement with the rescaled participation number for extended states in disordered systems [22,24,32].

Furthermore, it is relevant to point out that, generally speaking, γ is related to the so-called Hurst exponent \mathcal{H} through $\mathcal{H} = (\gamma - 1)/2$ which describes the long-term memory of a given series. The set spanned by Eq. (2) is said to be nonstationary when $\gamma > 1$ and persistent (anti-persistent) when $\gamma > 2$ ($\gamma < 2$). When $\alpha = 2$ the series corresponds exactly to the trace of the Brownian motion. $\mathcal{H} = 1$ for $\gamma \geq 3$ signaling that the generated series becomes locally completely correlated with no local roughness in the thermodynamic limit. However, global disorder still persists due to the random nature of the phases used to generate the full series. Moreover, as shown in [19] in the case of on-site disorder only, $\alpha = 2$ marks the transition point between Anderson-like insulator and metallic phases with sharp mobility edges.

3.2. Time dynamics and quantum-state transfer

The interplay between localized and delocalized states we have seen in the previous section allows for a rich variety of dynamical regimes [25]. Our goal now is explore how the competition between two independent sources of correlated disorder reflects upon the spreading profile of the initial state of a single electron. Right after that, we will tackle a very appealing application of such platforms in the context of quantum information processing.

Figs. 4 and 5 show a summary of our calculations for the time-dependent spread and participation number for an initial delta-like state prepared at the $(N/2)$ th site, that is $c_n(0) = \delta_{n,N/2}$. Those

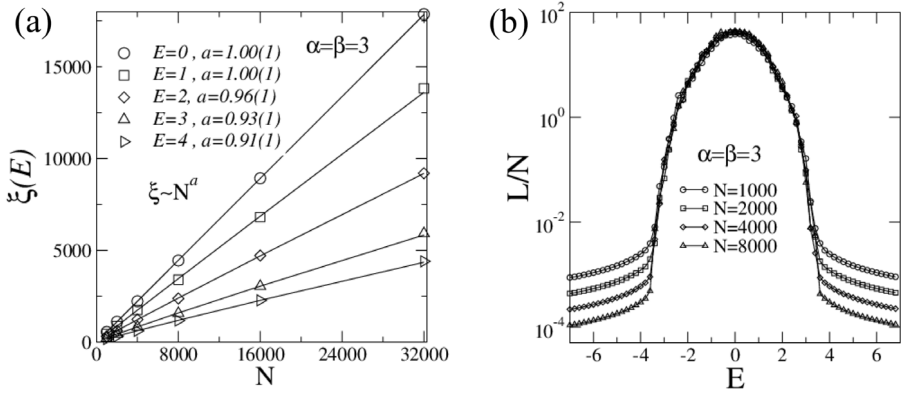


Fig. 2. In (a) we show the size dependence of the participation number for some typical energies evidencing the sub-linear scaling of the weakly localized states near the band edge. The spectrum of the normalized localization length L/N is shown in (b) which clearly signals the mobility edges. Here we fixed $\alpha = \beta = 3$.

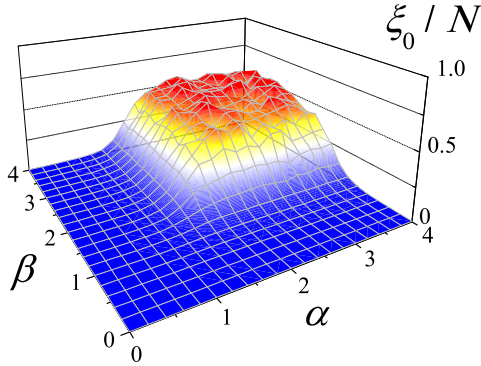


Fig. 3. Rescaled participation number around the band center, $\xi(E \approx 0)/N = \xi_0/N$, versus α and β for $N = 8000$ sites. The chain is able to support extended states around the center of the band only when both diagonal and off-diagonal sources of disorder are both long-range correlated obeying, roughly, $\alpha, \beta > 2$.

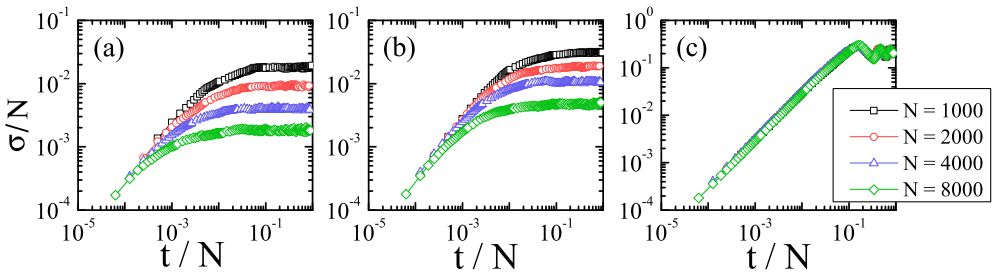


Fig. 4. Rescaled square root of the mean square displacement (σ/N) versus rescaled time (t/N) for (a) $\alpha = 3, \beta = 0$; (b) $\alpha = 0, \beta = 3$; and (c) $\alpha = 3, \beta = 3$.

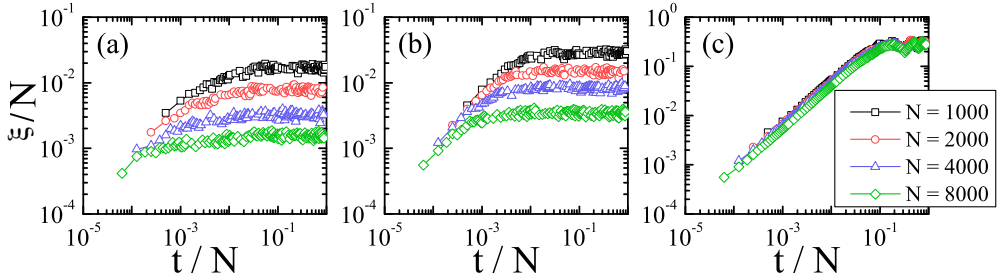


Fig. 5. Rescaled participation number (ξ/N) versus rescaled time (t/N) for (a) $\alpha = 3, \beta = 0$; (b) $\alpha = 0, \beta = 3$; and (c) $\alpha = 3, \beta = 3$.

coefficients at a later time are evaluated through Eq. (4) for $N = 1000$ up to 8000 for various combinations of α and β . For comparison purposes, time and functions of interest were rescaled by the system size N . We computed $c_n(t)$ until a stationary state could be reached after multiple reflections of the wavepacket on the lattice boundaries. Therefore, for α and β larger than 2 [see Figs. 4(c) and 5(c)] we obtained a sharp curve collapse thus implying that the wavepacket spreads ballistically before reaching the boundaries of the chain. Notice, however, that the collapse of the participation number data is less striking because this quantity is more affected by statistical fluctuations. For α or β less than 2, on the other hand, panels (a) and (b) of Figs. 4 and 5 there is clearly no collapse, thus suggesting a much slower electronic dynamics along the chain [22].

In general lines, our results show that chains with correlated disorder in both diagonal and off-diagonal terms can only support the presence of extended states once both sources of disorder display strong enough correlations, that is $\alpha, \beta > 2$. Still, it is very impressive that two competing and independent sources of noise allow for coherent transmission of electronic excitations through the chain. That could, for instance, find many applications in quantum communication protocols using solid-state devices [61]. Now, we evaluate the robustness of a quantum-state transfer protocol [42] against such generalized disorder sources.

First, let us make further assumptions towards the configuration of the system. We now consider a chain made up by $N + 2$ sites [described by the very same Hamiltonian in Eq. (1) now with $N \rightarrow N + 2$], such that the first and last one will act as, respectively, sender and receiver parties. For those, particularly, we set $\epsilon_1 = \epsilon_{N+2} = 0$ and $J_1 = J_{N+1} = g$ that is, disorder is only present along the communication channel itself (sites 2 to $N + 1$). The transfer scheme we employ here is based on the weak-coupling model [44,45,62] – usually worked out in the context of spin chains – where g is set several orders of magnitude weaker than the energy scale of the channel. That forces both end sites to span their own subspace, with a couple of eigenstates taking the form $|\psi^\pm\rangle \approx (|1\rangle \pm |N+2\rangle)/\sqrt{2}$ so that state transmission takes place via coherent dynamics between them after time $\tau \sim \pi/\delta\lambda$, with $\delta\lambda$ being the (usually very small) energy gap between those states. Naturally, nearly-perfect transmission shall be expected in ordered chains. If that is not the case, the presence of generalized disorder breaks down the mirror and particle-hole symmetries of the system thus damaging the effective two-body coupling between the ends of the chain [45].

We are now about to show that a high-fidelity quantum-state transfer protocol can actually be realized in the presence of correlated fluctuations, involving the whole channel. Let us outline the transfer protocol following the original proposal from Ref. [42]. Suppose that Alice wishes to send an arbitrary qubit $|\varphi\rangle_1 = a|0\rangle_1 + b|1\rangle_1$ to Bob, where $|0\rangle_i$ ($|1\rangle_i$) denotes the absence (presence) of an electron at site i . Then, she arranges for an initial state of the form $|\Psi(0)\rangle = |\varphi\rangle_1|0\rangle_2 \dots |0\rangle_{N+2}$. By letting the system evolve following its natural Hamiltonian dynamics, she expects, in the best-case scenario, to have $|\Psi(\tau)\rangle = |0\rangle_1|0\rangle_2 \dots |0\rangle_{N+1}|\varphi\rangle_{N+2}$ so Bob can properly retrieve the qubit. A measure for the figure of merit of the protocol can be obtained by averaging the input fidelity over the whole Bloch sphere (for details, see [42]):

$$F(t) = \frac{1}{2} + \frac{|c_{N+2}(t)|}{3} + \frac{|c_{N+2}(t)|^2}{6}, \quad (6)$$

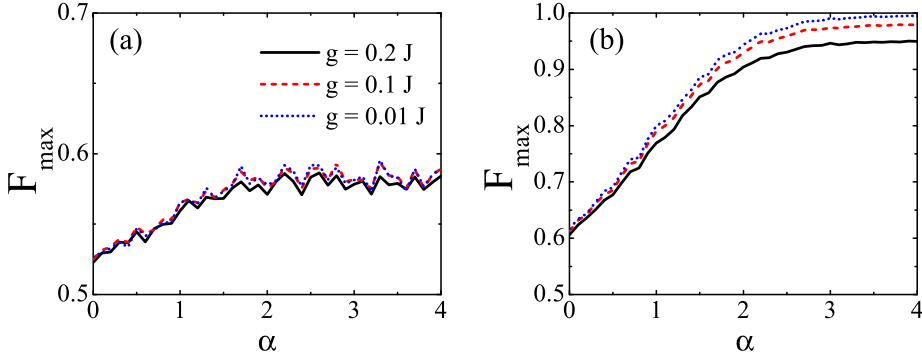


Fig. 6. Maximum fidelity versus α averaged over 500 independent realizations of disorder in a 50-site channel (52 sites total) for (a) $\beta = 0$ and (b) $\beta = 3$. Solid, dashed, dotted lines display results for $g/J = 0.2, 0.1, 0.01$, respectively. $F_{\max} \equiv \max\{F(t)\}$ was evaluated over the time window $tJ \in [0, 2 \times 10^5]$.

which is basically a monotonic function of the transition amplitude between sender and receiver sites, $c_{N+2}(t) \equiv \sum_j f_1^{j*} f_{N+2}^j e^{-iE_j t}$ [cf. Eq. (4)].

Here we are concerned with the maximum fidelity $F_{\max} = \max\{F(t)\}$ achieved during a given interval since the dynamics time scale of the system varies considerably from sample to sample. In particular, we evaluated F_{\max} over $tJ \in [0, 2 \times 10^5]$ for about 500 independent realizations of disorder and averaged them out for every system configuration as shown in Fig. 6. There, it is clear that an efficient transfer protocol can be performed through such noisy channel once supported by prominent intrinsic correlations in both sources of disorder [see Fig. 6(b)]. We observe that F_{\max} tends to saturate after $\alpha > 2$, thus pointing out the crucial role of extended states in the process. We also highlight in Fig. 6(b) that we are able to achieve nearly perfect fidelities provided g is weak enough, in order to avoid mixing between the channel and sender/receiver subspaces.

What is most impressive in the results shown above is that, even though the noisy channel must be augmented with strong long-range correlations in order to establish successful quantum-state transfer rounds, considerable amounts of global disorder are *still* present in the system due to the random nature of the phases used to generate the potential landscape. That ultimately destroys the mirror and particle-hole symmetries of the spectrum [54] and so, intuitively, it should not allow for an effective *resonant* interaction between the outer ends of the chain. Fortunately, it actually does. A very useful picture of this can be put forward by writing down the sender/receiver decoupled Hamiltonian with renormalized parameters obtained through second-order perturbation theory in g [(for details, see Ref. [45]), $H_{\text{eff}} = h_1|1\rangle\langle 1| + h_{N+2}|N+2\rangle\langle N+2| - J'(|1\rangle\langle N+2| + \text{h.c.})$, where

$$h_1 = -g^2 \sum_k |f_2^k|^2 / E_k, \quad (7)$$

$$h_{N+2} = -g^2 \sum_k |f_{N+1}^k|^2 / E_k, \quad (8)$$

$$J' = g^2 \sum_k f_2^k f_{N+1}^{k*} / E_k, \quad (9)$$

with the sum in k running over the normal modes of the channel only. Recalling that sites 1 (sender) and $N+2$ (receiver) are tuned to the middle of the band, $\epsilon_1 = \epsilon_{N+2} = 0$, the existence of delocalized states at this region of the spectrum provided the degree of correlations α and β are high enough (that is, greater than 2) is such that it *masks* the overall asymmetric nature of the chain yielding rather balanced distributions of amplitudes f_2^k and f_{N+1}^k . Hence, $h_1 \approx h_{N+2}$ what triggers an effective two-site dynamics with negligible local impurities. Moreover, since the renormalized parameters [Eqs. (7) through (9)] scales with E_k^{-1} , the outskirts of the band, filled by localized-like states (thus more spatially asymmetric), have a much weaker influence on them.

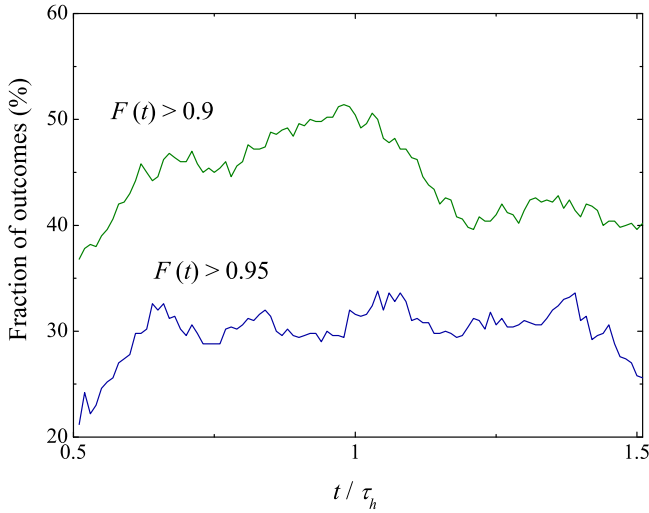


Fig. 7. Fraction of samples (%) satisfying $F(t) > 0.9$ and $F(t) > 0.95$ versus time in units of $\tau_h = \pi J/g^2$. We gathered 500 independent disorder realizations for $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $N = 50$, and $g = 0.01J$.

3.3. Timing

Previously, we discussed the state-transfer figure of merit by focusing on the fidelity statistics over a fixed time interval. That allowed us to evaluate the prospect of generating an effective two-state (Rabi-like) dynamics between the first and last sites of the chain under the influence of long-range-correlated disorder. On the practical side, though, one should let Bob know in advance the time (at least approximately) the state is supposed to arrive at his location. Disorder, however, will unavoidably lead to timing errors unless precise knowledge over the configuration of the chain at every realization is available. Still, it is convenient to establish a proper measurement time window with higher chances of getting the state intended to, compatible to the type of disorder present in the system.

To see about that, let us first discuss how the transfer time responds to the hopping strengths of the chain. We recall that the transfer time for the effective two-site model is given by $\pi/\delta\lambda$, with the gap $\delta\lambda = 2|J'|$ [see Eq. (9)]. Given a uniform distribution of on-site potentials (that is, $\epsilon_n = \epsilon$) in a channel featuring an even number of sites N , it has been shown in Ref. [62] that the effective coupling J' between the outer ends of the chain can be expressed through a surprisingly simple formula (see [62] for details),

$$J' = g^2 \frac{J_3 J_5 \cdots J_{N-1}}{J_2 J_4 \cdots J_N} (-1)^{\frac{N}{2}} \quad (10)$$

Therefore, we readily see that for homogeneous couplings, say $J_i = 2J$ above, the transfer time is $\tau_h = \pi J/g^2$. Taking our disorder configuration into account, we expect that the transfer time τ associated with higher fidelities (close to unity) falls within the vicinity of τ_h .

Fig. 7 shows the fraction of samples displaying $F(t) > 0.9$ and $F(t) > 0.95$ at times ranging from $t = 0.5\tau_h$ to $t = 1.5\tau_h$. We readily note that about 50% of the disorder realizations had fidelities above 0.9 at specific times close to τ_h . Upon increasing this threshold to 0.95, the fraction reaches slightly over 30%. This is expected because the fidelity here is largely an oscillating function and so as we look towards the peak at some well defined time, the number of samples satisfying the threshold will decrease.

Last, we mention that, on the one hand, quantum communication protocols via weak-coupled ends [44,45,62] requires characteristically long times to perform the transfer when compared to

fully-engineered schemes [43]. On the other hand, it is shown to be very robust against static perturbations [55]. The transfer time can be substantially shortened by optimizing the outer couplings in order to achieve the so-called ballistic regime for quantum-state transfer [63]. The influence of correlated disorder on this regime is a subject worth to investigate in the future.

4. Conclusions

In this work we considered an electronic tight-binding chain with correlated disorder in both diagonal and off-diagonal terms of the Hamiltonian. The fractional Brownian motion was used to generate each corresponding disorder distributions. We analyzed the localization properties of the system, accounted by the participation ratio of its entire spectrum, and also evaluated the electronic dynamics profile along the chain. We showed that such model supports extended states only if both sources of disorder contain strong intrinsic long-range correlations with both $\alpha > 2$, and $\beta > 2$. We also investigated a possible application for this class of chains in the context of quantum-state transfer protocols. By perturbatively coupling both communicating parties to the noisy chain, it is possible to transmit an excitation from one end of the chain to another with very high fidelities as long as a proper set of delocalized states is available in the spectrum in order to overcome the spatial asymmetry induced by disorder.

By tackling the properties of a standard electronic hopping model augmented with twofold long-range-correlated disorder, we set the ground for further studies along that direction involving other classes of many-body interacting models. Moreover, we also highlight the importance of investigating special types of disorder that might occur in real solid-state devices for quantum information processing tasks [40].

Acknowledgments

This work was partially supported by CNPq (Grant No. 152722/2016-5), CAPES, and FINEP (Federal Brazilian Agencies), CNPq-Rede Nanobioestruturas, and FAPEAL (Alagoas State Agency).


References

- [1] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello, T.V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* 42 (1979) 673.
- [2] B. Kramer, A. MacKinnon, *Rep. Progr. Phys.* 56 (1993) 1469.
- [3] A. Nandy, B. Pal, A. Chakrabarti, *Europhys. Lett.* 115 (2016) 37004.
- [4] W.W. Cheng, L.J. Zhang, L.Y. Gong, S.M. Zhao, *Ann. Phys.* 370 (2016) 67.
- [5] A.M. García-García, *Phys. Rev. Lett.* 100 (2008) 076404.
- [6] A. Rodríguez, L.J. Vasquez, R.A. Römer, *Phys. Rev. B* 78 (2008) 195106.
- [7] M. Modugno, *New J. Phys.* 11 (2009) 033023;
C. Tian, A. Altland, *New J. Phys.* 12 (2010) 043043;
F. Dukesz, M. Zilbergerts, L.F. Santos, *New J. Phys.* 11 (2009) 043026;
R. Steinigeweg, H. Niemeyer, J. Gemmer, *New J. Phys.* 12 (2010) 113001;
Y. Krivolapov, L. Levi, S. Fishman, M. Segev, M. Wilkinson, *New J. Phys.* 14 (2012) 043047.
- [8] V. Gasparian, A. Suzuki, *J. Phys.: Condens. Matter* 21 (2009) 405302.
- [9] A. Rodríguez, L.J. Vasquez, R.A. Römer, *Phys. Rev. Lett.* 102 (2009) 106406.
- [10] A. Rodríguez, L.J. Vasquez, K. Slevin, R.A. Römer, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 046403.
- [11] G. Lemarié, H. Lignier, D. Delande, P. Szriftgiser, J.C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010) 090601.
- [12] A. Rodríguez, L.J. Vasquez, K. Slevin, R.A. Römer, *Phys. Rev. B* 84 (2011) 134209.
- [13] J.J. Krich, A. Aspuru-Guzik, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 156405.
- [14] V. Gasparian, M. Cahay, E. Jódar, *J. Phys.: Condens. Matter* 23 (2011) 045301.
- [15] Y. Zhao, S. Duan, W. Zhang, *Phys.: Condens. Matter* 24 (2012) 245502.
- [16] G.P. Zhang, M. Gao, Y.Y. Zhang, N. Liu, Z.J. Qin, M.H. Shanguan, *J. Phys.: Condens. Matter* 24 (2012) 235303.
- [17] J.C. Flores, *J. Phys. Condens. Matter* 1 (1989) 8471.
- [18] D.H. Dunlap, H.L. Wu, P.W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 88;
L. H. -Wu, P. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* 66 (1991) 1366.
- [19] F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 3735.
- [20] F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, *Physica A* 266 (1999) 465.
- [21] F.M. Izrailev, A.A. Krokhin, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 4062.
- [22] F.A.B.F. de Moura, M.D. Coutinho-Filho, E.P. Raposo, M.L. Lyra, *Europhys. Lett.* 66 (2004) 585.
- [23] M. Unge, S. Stafstrom, *Phys. Rev. B* 74 (2006) 235403.

- [24] I.F. dos Santos, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, M.D. Coutinho-Filho, *J. Phys.: Condens. Matter* 19 (2007) 476213.
- [25] F. Domínguez-Adame, V.A. Malyshev, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 197402.
- [26] F.A.B.F. de Moura, *Eur. Phys. J. B* 78 (2010) 335.
- [27] W.S. Liu, T. Chen, S.J. Xiong, *J. Phys. Condens. Matter* 11 (1999) 6883.
- [28] G.P. Zhang, S.-J. Xiong, *Eur. Phys. J. B* 29 (2002) 491.
- [29] V. Bellani, E. Diez, R. Hey, L. Toni, L. Tarricone, G.B. Parravicini, F. Domínguez-Adame, R. Gómez-Alcalá, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 2159.
- [30] V. Bellani, E. Diez, A. Parisini, L. Tarricone, R. Hey, G.B. Parravicini, F. Domínguez-Adame, *Physica E* 7 (2000) 823.
- [31] H. Shima, T. Nomura, T. Nakayama, *Phys. Rev. B* 70 (2004) 075116.
- [32] T.F. Assunção, M.L. Lyra, F. Domínguez-Adame, F.A.B.F. de Moura, *Phys. Lett. A* 375 (2011) 1048.
- [33] H. Cheraghchi, S.M. Fazeli, K. Esfarjani, *Phys. Rev. B* 72 (2005) 174207.
- [34] G. Schubert, A. Weiße, H. Fehske, *Physica B* 801 (2005) 359.
- [35] F.M. Izrailev, A.A. Krokhin, N.M. Makarov, *Phys. Rep.* 512 (2012) 125.
- [36] A. Croy, M. Schreiber, *Phys. Rev. B* 85 (2012) 205147.
- [37] C. Albrecht, S. Wimberger, *Phys. Rev. B* 85 (2012) 045107.
- [38] G.M. Petersen, N. Sandler, *Phys. Rev. B* 87 (2013) 195443.
- [39] P. Thiessen, E. Diaz, R.A. Romer, F. Domínguez-Adame, *Phys. Rev. B* 95 (2017) 195431.
- [40] G.M.A. Almeida, F.A.B.F. de Moura, T.J.G. Apollaro, M.L. Lyra, *Phys. Rev. A* 96 (2017) 032315.
- [41] U. Kuhl, F.M. Izrailev, A. Krokhin, H.J. Stöckmann, *Appl. Phys. Lett.* 77 (2000) 633.
- [42] S. Bose, *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003) 207901.
- [43] M. Christandl, M. Datta, A. Ekert, A.J. Landahl, *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 187902.
- [44] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska, *Phys. Rev. A* 72 (2005) 034303.
- [45] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 022330.
- [46] B. Chen, Y. Li, Z. Song, C.-P. Sun, *Ann. Phys.* 348 (2014) 278.
- [47] S. Longhi, *Ann. Phys.* 345 (2014) 63.
- [48] G.M.A. Almeida, F. Ciccarello, T.J.G. Apollaro, A.M.C. Souza, *Phys. Rev. A* 93 (2016) 032310.
- [49] X.-P. Zhang, B. Chao, S. Hu, J. Zou, L.-A. Wu, *Ann. Phys.* 375 (2016) 435.
- [50] J.I. Cirac, P. Zoller, H.J. Kimble, H. Mabuchi, *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997) 3221.
- [51] G. De Chiara, D. Rossini, S. Montangero, R. Fazio, *Phys. Rev. A* 72 (2005) 012323.
- [52] D. Burgarth, S. Bose, *New J. Phys.* 7 (2005) 135.
- [53] D.I. Tsomokos, M.J. Hartmann, S.F. Huelga, M.B. Plenio, *New J. Phys.* 9 (2007) 79.
- [54] N.Y. Yao, L. Jiang, A.V. Gorshkov, Z.-X. Gong, A. Zhai, L.-M. Duan, M.D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) 040505.
- [55] A. Zwick, G.A. Álvarez, J. Stolze, O. Osenda, *Phys. Rev. A* 84 (2011) 022311.
- [56] S. Ashhab, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 062305.
- [57] M.P. Estarellas, I. D'Amico, T.P. Spiller, *Phys. Rev. A* 95 (2017) 042335.
- [58] G.M.A. Almeida, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, arXiv:1711.08553 [quant-ph], 2017.
- [59] M.O. Sales, F.A.B.F. de Moura, *Physica E* 45 (2012) 97.
- [60] R.P.A. Lima, M.L. Lyra, E.M. Nascimento, A.D. de Jesus, *Phys. Rev. B* 65 (2002) 104416.
- [61] T.J.G. Apollaro, S. Lorenzo, F. Plastina, *Internat. J. Modern Phys. B* 27 (2013) 1345035.
- [62] G.M.A. Almeida, *Phys. Rev. A* 98 (2018) 012334.
- [63] L. Banchi, T.J.G. Apollaro, A. Cuccoli, R. Vaia, P. Verrucchi, *Phys. Rev. A* 82 (2010) 052321; *New J. Phys.* 13 (2011) 123006; T.J.G. Apollaro, L. Banchi, A. Cuccoli, R. Vaia, P. Verrucchi, *Phys. Rev. A* 85 (2012) 052319.

Localization-delocalization transition in discrete-time quantum walks with long-range correlated disorder

C. V. C. Mendes, G. M. A. Almeida, M. L. Lyra, and F. A. B. F. de Moura^{*}
Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, 57072-900 Maceió, AL, Brazil

 (Received 18 October 2018; revised manuscript received 11 January 2019; published 12 February 2019)

We study the effects of spatially long-range correlated phase disorder on the Hadamard quantum walk on a line. The shift operator is built to exhibit an intrinsic disorder distribution featuring long-range correlations. To impose such, we resort to fractional Brownian motion with power-law spectrum $1/k^{2\alpha}$ with $\alpha \geq 0$ being the exponent that controls the degree of correlations. We discuss the scaling behavior of the walker's wave packet and report a localization-delocalization transition controlled by α . We unveil two intermediate dynamical regimes between exponential localization and full delocalization.

DOI: [10.1103/PhysRevE.99.022117](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.99.022117)

I. INTRODUCTION

Quantum walk is the quantum mechanical analog of the classical random walk. Interest in the subject emerged roughly three decades ago after Aharonov *et al.* [1] put forward the main idea. As classical random walks have been of great utility in computer science, quantum walks are a formidable tool for designing quantum algorithms and for running quantum simulations (see Refs. [2,3] for reviews of the subject).

One of its main features is that the particle's wave function spreads out ballistically (rather than diffusively) on a regular lattice due to intrinsic quantum interference effects. Thereby, quantum walks yield significantly faster hitting times when compared to the classical case and thus readily find applications in quantum search problems [4–6]. Moreover, it was shown that quantum walks feature the necessary ingredients for universal quantum computation [7,8].

Quantum walks can be divided into two main kinds. Continuous-time quantum walks [9] are performed by defining a hopping Hamiltonian on a chosen graph and letting the system evolve through the Schrödinger equation. In a discrete-time quantum walk (DTQW) [1], the standard underlying mechanism consists of a set of internal degrees of freedom (e.g., spin) being the coin space (not necessarily being restricted to a two-dimensional subspace) alongside a configuration space denoting the walker's position. The protocol itself is triggered by repeatedly executing a “coin toss”—a unitary transformation acting on the coin space that scrambles wave-function components—followed by a conditional displacement obeying the coin state. Experimentally, this can be implemented using, e.g., NMR [10], ion traps [11], waveguide arrays [12,13], and superconducting devices [14].

The freedom in setting up the coin entails that very rich dynamics can be generated from rather simple rules thereby allowing one to obtain a handful of dynamical regimes at will [15]. After all, DTQWs can also be seen as a quantum cellular automaton [16]. Moreover, the interest in this kind of

procedure is far from being restricted to single-particle dynamics. Quantum walks of two interacting or noninteracting particles have also been addressed [17–21] and proved to be experimentally feasible [13,22]. This opens up the possibility of probing multiparticle entanglement and the role of interactions between them and, due to its greater complexity, may also be useful to deal with challenging computational tasks such as the graph isomorphism problem [23,24].

DTQWs then provide a powerful framework for studying complex quantum behavior, including decoherence [25], strongly correlated phenomena [26,27], topological phases [14,28–32], and localization [28,31,33–39], to name a few. This last in particular has been a relevant subject with some experiments being carried out [40,41]. In general, we expect the walker to undergo Anderson localization when subjected to disorder. It thus becomes important to find out how the transport properties of DTQWs are affected against different forms of noise.

In Refs. [28,31] the authors addressed dynamical regimes where Anderson localization in a DTQW is bypassed even in the presence of disorder, with the wave function avoiding complete trapping over a finite region of lattice. They further explained it in terms of topological phases of the quantum walk. Another remarkable feature in particular, as showed by Vieira *et al.* [42], is displayed by a class of dynamically disordered one-dimensional (1D) DTQWs in which spin-position entanglement reaches its maximum asymptotically for any input, thus outperforming its ordered counterpart. This was further investigated including fluctuating and static disorder [43], and an experiment has recently been performed in a photonic platform [44].

These examples make the case that disorder can be a handy resource, especially when one has some degree of control over it. Properly tailored disordered DTQWs thus possess enormous potential in quantum information processing. Our goal here is to unveil transport properties of a class of correlated, static disorder known for inducing a localization-delocalization transition [45].

In condensed matter physics, the breakdown of Anderson localization can be spotted in 1D tight-binding models with

^{*}fidelis@fis.ufal.br

disorder featuring short- [46,47] or long-range correlations [45,48]. The latter was found to undergo a metal-insulator transition with sharp mobility edges indicating the presence of extended states [45,48]. Its rich dynamics has been exploited since then in various frameworks [49–55], including experimental verification using waveguides [56,57]. The interplay between localization and delocalization also finds use in quantum-communication tasks such as entanglement distribution [54] and quantum-state transfer [55].

In this work we aim to explore the wave-packet dynamics of a 1D DTQW embedded with long-range correlations following a power law encoded as on-site static phase disorder [39] in the conditional translation operator. In our calculations, the shift operator is built using as the source of disorder a fractional Brownian motion with power-law spectrum having a characteristic exponent α accounting for the degree of correlations within the shift unitary operator ($\alpha \geq 0$). In particular, we rely on finite-size scaling analysis to characterize the transition from exponential localization to delocalization of the walker's wave packet.

II. MODEL AND FORMALISM

We deal with a Hadamard quantum walk on an open line. Let H_p be the Hilbert space spanned by the positions $\{|n\rangle\}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) of the particle alongside a two-level coin space defined by H_C . This last may be associated with internal degrees of freedom of the walker, say, its spin ($|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$). The total Hilbert space of the quantum walk is thus $H = H_C \otimes H_p$. The evolution for a given initial state $|\psi(t=0)\rangle$ can be evaluated using a unitary operator U defined as $U = S(C \otimes I)$ where S is the conditional translation operator including on-site static phase disorder [39],

$$S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \sum_n (e^{i2\pi\zeta_{n+1}} |n+1\rangle\langle n|) + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \sum_n (e^{i2\pi\zeta_{n-1}} |n-1\rangle\langle n|), \quad (1)$$

with ζ_n denoting the disordered phase, and C being the Hadamard coin operator,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

The quantum state of the walker at the time t is given by $|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(t=0)\rangle$. In this work, ζ_n takes values obtained from a disorder distribution with intrinsic long-range correlations. To generate these numbers we consider the trace of the fractional Brownian motion defined by [45]

$$V_n = \sum_{k=1}^{N/2} \frac{1}{k^\alpha} \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \phi_k\right), \quad (3)$$

where ϕ_k represents a random phase distributed within the range $[0, 2\pi]$. We emphasize that the sequence $\{V_n\}$ features a power spectrum of approximately $1/k^{2\alpha}$ [45]. For $\alpha = 0$, the sequence is fairly uncorrelated. On the other hand, $\alpha > 0$ introduces long-range correlations in $\{V_n\}$. Therefore, exponent α ultimately controls the degree of correlations within the disordered sequence. In addition, hereafter we normalize

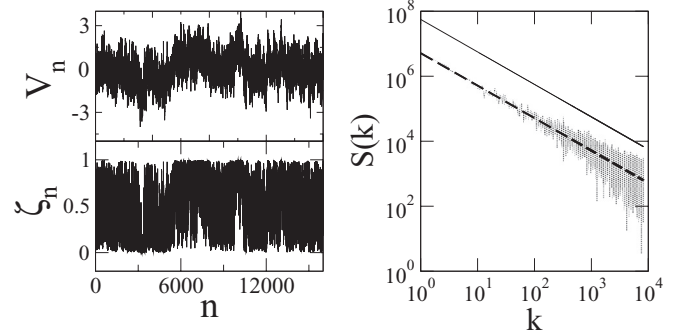


FIG. 1. Left: V_n and ζ_n landscapes for a chain with $N = 16000$ sites and $\alpha = 0.5$. The mapping transformation restricts ζ_n to the interval $[0, 1]$. Right: Spectral densities of the potential landscapes. V_n has a pure power-law spectrum (solid line). The spectral density of ζ_n exhibits the same overall power-law decay with random fluctuations. The dashed line is a guide for the eye.

$\{V_n\}$ so that $\langle V_n \rangle = 0$ and $\langle V_n^2 \rangle = 1$. This effectively modifies the disorder strength locally while keeping the global disorder strength the same for any α [58].

With all that set up, we define $\zeta_n = 0.5 \tanh(V_n) + 0.5$ to adjust the range of the correlated disordered phases within the interval $[0, 2\pi]$. We stress that this transformation does not change the asymptotic correlation function of the sequence. In Fig. 1 we illustrate this aspect by plotting both V_n and ζ_n together with their respective spectral densities for the particular case of $\alpha = 0.5$. Note that both series have a power-law spectrum, and the mapping between them only adds random fluctuations to the overall $1/k$ decay. The resulting series develops distinct statistical properties depending on the value of α . For $\alpha < 1/2$ it remains statistically stationary. For $1/2 < \alpha < 3/2$ it generates a landscape with a fractional dimensionality and Hurst exponent $H = \alpha - 1/2$ [59]. This implies that the series is similar to the trace of a fractional Brownian motion with antipersistent increments for $1/2 < \alpha < 1$ and persistent increments for $1 < \alpha < 3/2$. For larger values of α the series has $H = 1$ and the underlying disorder becomes irrelevant. In what follows we show that the dynamics of the quantum walker is strongly dependent on the statistical regime of the random phase landscape.

Most of our analysis is made upon the wave-packet spreading

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n [n - \langle n(t) \rangle]^2 P_n(t)}, \quad (4)$$

where $P_n(t) = |\langle \psi(t) | \uparrow, n \rangle|^2 + |\langle \psi(t) | \downarrow, n \rangle|^2$ is the probability of the walker to be found at the n th site and $\langle n(t) \rangle = \sum_n n P_n(t)$ is the walker's mean position. In short, σ measures the width of the wave packet. This piece of information allows us to tell about how fast it goes over time as well as its localization properties. The latter can be inferred from a finite-size scaling analysis. If, after a very long time, $\sigma \propto N$ (σ remains constant), this means delocalization (localization). Further, $\sigma \propto t^1$ indicates ballistic dynamics with constant velocity while $\sigma \propto t^{1/2}$ points to diffusive spreading. Now equipped with the tools above, we are ready to perform a

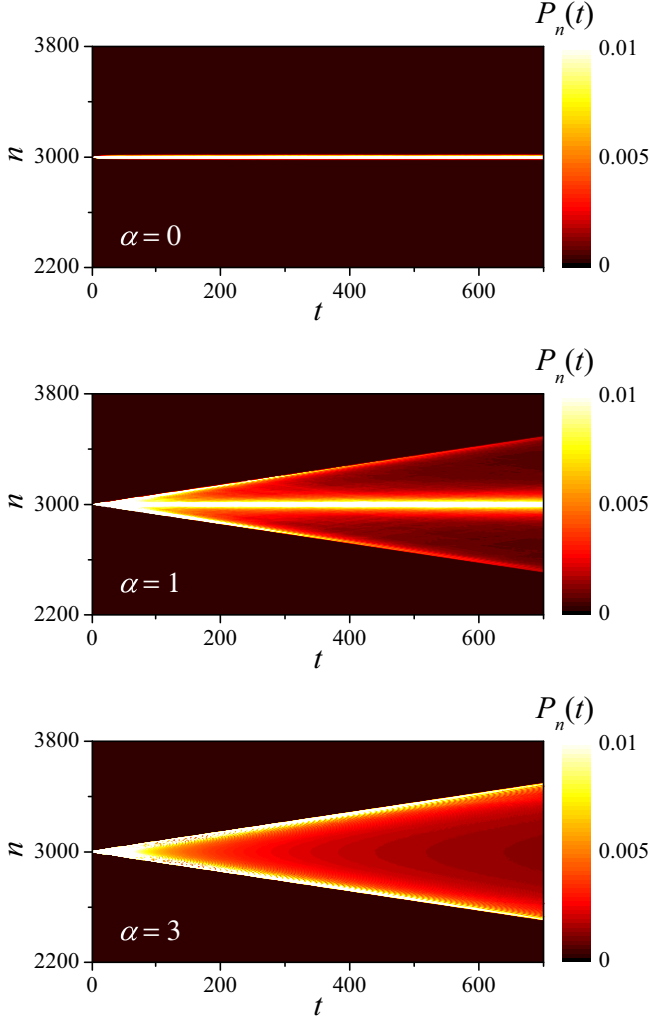


FIG. 2. Time evolution of the wave-packet probability distribution $P_n(t)$ versus n and t for $\alpha = 0, 1$, and 3 averaged over 10^3 realizations of disorder. For weak correlations ($\alpha = 0$ and 1) a finite fraction of the walker remains localized around the initial position $n_0 = N/2 = 3000$. For $\alpha = 3$ the state acquires a delocalized-like behavior.

detailed investigation into the dynamics of the disordered DTQW.

III. RESULTS AND DISCUSSION

In the following we discuss our results based on numerical simulations of the disordered quantum walk. In all figures displayed hereafter, the initial state is a symmetric one of the form $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow, n_0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow, n_0\rangle$ with $n_0 = N/2$.

Let us first take a look over the dynamics profile of the walker upon varying α . In Fig. 2 we plot the time evolution of $P_n(t)$ versus n and t for $\alpha = 0, 1$, and 3 in an open chain. We observe that for $\alpha = 0$ the walker remains trapped around the initial position n_0 as expected since this case represents a quantum walk evolving in a chain with uncorrelated disorder. As widely known [28,31,35,37–41], disordered DTQWs share some similarities with the standard Anderson localization theory, meaning that the random scattering of the wave packet

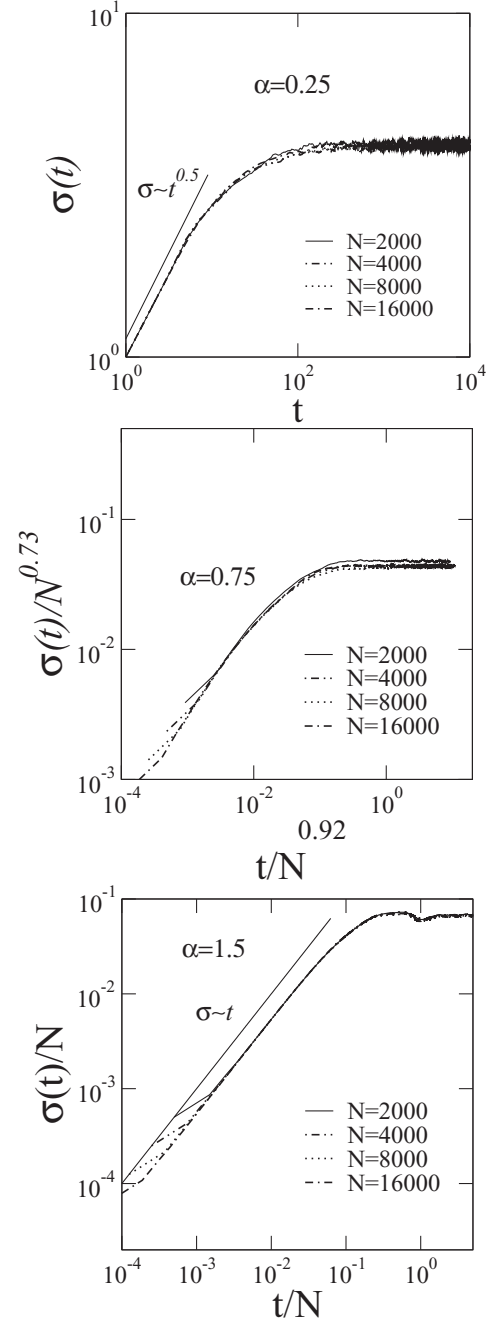


FIG. 3. $\sigma(t)$ versus t for $\alpha = 0.25, 0.75$, and 1.5 averaged over 10^3 distinct samples. For $\alpha = 1.5$ the walker wave-packet width exhibits ballistic dynamics with $\sigma \propto t$ before saturating due to finite-size effects. Data collapse is obtained by rescaling the width and time linearly by the chain size. Note that for $\alpha = 0.25$, σ is size independent. For $\alpha = 0.75$, data collapse is seen after properly rescaling the width and time by a sublinear power of the chain size.

leads to exponential localization of the quantum walker. This scenario changes when long-range correlations are added into disorder. For $\alpha = 1$ we already note that a fraction of the probability spreads within the chain while another finite fraction of the initial wave packet remains trapped around the initial site. For $\alpha = 3$ the wave-packet probability profile readily suggests delocalization of the quantum walker. We can see that the

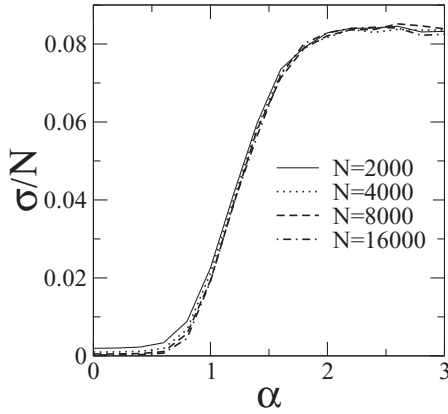


FIG. 4. Scaled long-time wave-function width $\sigma(t = 5N)/N$ versus α for $N = 2000$ to $16\,000$ averaged over 10^3 distinct disorder samples. Note that σ/N remains finite and size independent for large α .

wave front advances linearly in time, and the fraction of wave packet around the initial position (return probability) becomes vanishingly small. Those findings are preliminary indications that the walker wave function acquires an extended behavior.

A more precise description, though, can be obtained by analyzing the evolution of the wave-packet width in chains with distinct sizes. In Fig. 3 we plot $\sigma(t)$ versus t for three representative values of α and chain sizes $N = 2000$ to $16\,000$. In the small α regime ($\alpha = 0.25$), the width σ is size independent and saturates after an initial diffusive spreading. In the intermediate regime ($\alpha = 0.75$) the wave-packet width presents a sublinear size dependence. Data from distinct chain sizes are fairly collapsed by using proper width and time scales. The last panel accounts for the regime of large α , represented by $\alpha = 1.5$. In this case the wave-packet asymptotic width scales linearly with the system size after an initial ballistic spreading at which the wave packet displays a constant speed

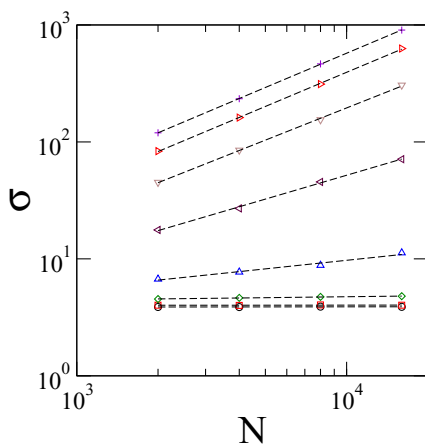


FIG. 5. Size dependence of the long-time wave-function width $\sigma(t = 5N)$ versus N for $\alpha = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4$ (from bottom to top). The crossover from the size independent to the linear scaling regime can be effectively described by a sublinear power-law behavior of the form $\sigma \propto N^\Sigma$.

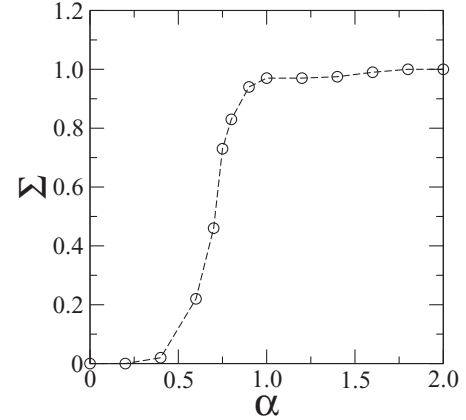


FIG. 6. Finite-size scaling exponent of the wave-packet width $\sigma \propto N^\Sigma$, with $\sigma = \sigma(t = 5N)$. The power-law exponents are estimated for sizes $N = 2000$ to $16\,000$. We note three distinct regimes: (1) full localization with $\Sigma = 0$; (2) sublinear scaling with $0 < \Sigma < 1$; and (3) full delocalization with $\Sigma = 1$.

$v(\alpha = 1.5) \simeq 0.54$. Data collapse is now achieved by scaling both width and time linearly with the system size.

In order to talk about the boundaries of each dynamical regime described above more precisely, we turn our attention to the long-time behavior of the wave-packet width. Considering that the statistically stationary state in the ballistic regime is reached for $t/N > 1$, we evaluate the wave-packet width around $t = 5N$ by averaging it over 100 time steps and 1000 distinct disorder configurations. Figure 4 shows the scaled long-time behavior of the walker's wave-function width σ/N versus α . This gives further support to the above indication that the wave-packet width remains finite for small values of α while scaling linearly with the system size for large values of α . In Fig. 5 we show in a log-log scale the size dependence of the wave-packet width for values of α within interval $[0, 1.4]$ and chain sizes ranging from $N = 2000$ to $N = 16\,000$. There we clearly see that the crossover from the size-independent to the linear regime can be well

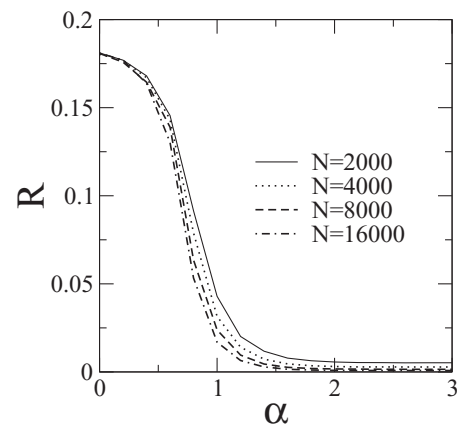


FIG. 7. Long-time behavior of the return probability $R = P_{n_0}(t = 5N)$ versus α for $N = 2000$ to $16\,000$ averaged over 10^3 distinct disorder samples. Note that the return probability remains finite and does not depend on the system size for $\alpha < 1/2$.

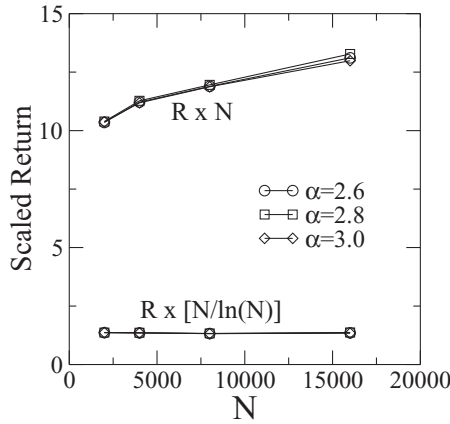


FIG. 8. Size dependence of RN and $RN/\ln N$ as a function of the chain size for representative values of α in the strongly correlated regime. The size independence of $RN/\ln N$ readily tells us how relevant this logarithmic correction is.

represented by an intermediate profile in which the wave-packet width depicts an effective sublinear finite-size scaling as $\sigma \propto N^\Sigma$, with $0 < \Sigma < 1$. The estimated values of the effective exponent Σ as a function of α are plotted in Fig. 6. It shows that the regime at which the wave packet remains fully localized, i.e., $\Sigma = 0$, persists up to $\alpha \simeq 0.5$. The fully extended state, corresponding to $\Sigma = 1$, emerges when $\alpha > 1$. In the range $0.5 < \alpha < 1$ the wave packet exhibits a sublinear finite-size scaling, signaling weak localization.

Further scaling analysis can also be performed for another very relevant property of the wave-packet dynamics, namely, its return probability $R(t) = P_{n_0}(t)$. In Fig. 7 we plot its statistically stationary value as a function of α obtained from distinct chain sizes. The return probability remains finite for small values of α and vanishes as it increases, in agreement with the localization-delocalization transition reported above. In order to unveil the finite-size scaling behavior of the return probability in the strongly correlated regime, we plot RN as well as $RN/\ln N$ as a function of the chain size in Fig. 8. There one observes that the proper scaling variable is the one that takes a logarithmic correction to the linear scaling into account, thus yielding a size-independent behavior. This very result indicates that in the strongly correlated regime the asymptotic return probability decays as $R \propto \ln(N)/N$.

Now taking $\tilde{N} = N/\ln N$ as the (more appropriate) scaling variable, we explore the size dependence of the return probability for a wide range of α . Our results are summarized in Fig. 9. Note that the crossover from the size independent to the linear scaling (with a logarithmic correction) regime can also be effectively described by an intermediate sublinear power-law scaling regime on which $R \propto \tilde{N}^\beta$, with $0 < \beta < 1$. The estimated values for the scaling exponent β are reported in Fig. 10. In the fully localized regime ($\alpha < 0.5$), the return scaling exponent $\beta = 0$, as expected. However, differently from the linear scaling behavior of the wave-packet width σ that develops at $\alpha = 1$, the linear scaling of the return probability is reached only for higher values of α .

Due to the *intrinsic* logarithmic correction to scaling of the return probability, numerical calculations carried out for

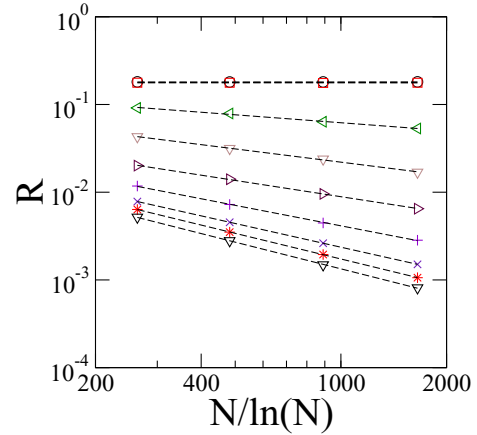


FIG. 9. Return probability R versus scaling variable $N/\ln N$ for $\alpha = 0, 0.2, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 3.0$ (from top to bottom). The intermediate scaling regime can be effectively represented by a sublinear power law $R \propto \tilde{N}^{-\beta}$ with $0 < \beta < 1$.

larger chain sizes would be necessary to accurately determine the upper bound of the regime with sublinear, finite-size scaling of the return probability. However, we conjecture that the exact bounds for the regimes reported above are directly related to the distinct statistical regimes of the underlying random phase landscape. When $\alpha < 1/2$ the phase sequence is stationary, thus leading to full localization. For nonstationary phase sequences with antipersistent increments, $1/2 < \alpha < 1$, one gets weak localization of the quantum walk wave function with a sublinear finite-size scaling of the wave-packet width. Localization also develops for phase sequences with persistent increments, $\alpha > 1$, which leads to the linear scaling of $\sigma \propto N$. However, a roughly uniform, statistically stationary wave-packet profile is reached only when the fractal character of the underlying phase landscape is lost, which makes disorder

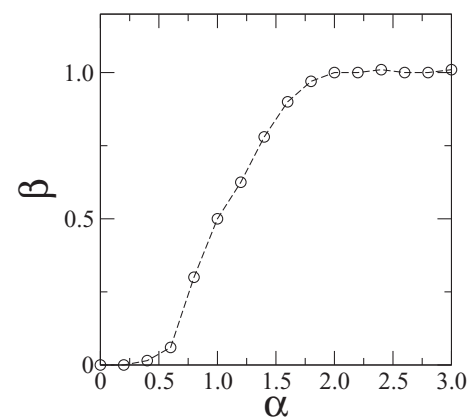


FIG. 10. Finite-size scaling exponent of the return probability $R \propto 1/\tilde{N}^\beta$, with $R = P_{n_0}(t = 5N)$, for $N = 2000, 4000, 8000$, and $16\,000$. Here $\tilde{N} = N/\ln N$. For each α and N we averaged $P_{n_0}(t)$ over 10^3 distinct realizations of disorder, picked out the last 100 steps before $t = 5N$, and then took another average to finally set R . We note three distinct regimes: (1) $\beta = 0$; (2) $0 < \beta < 1$; and (3) $\beta = 1$ (signaling a linear behavior with logarithmic correction). An intermediate, sublinear regime develops in the range $1/2 < \alpha < 3/2$.

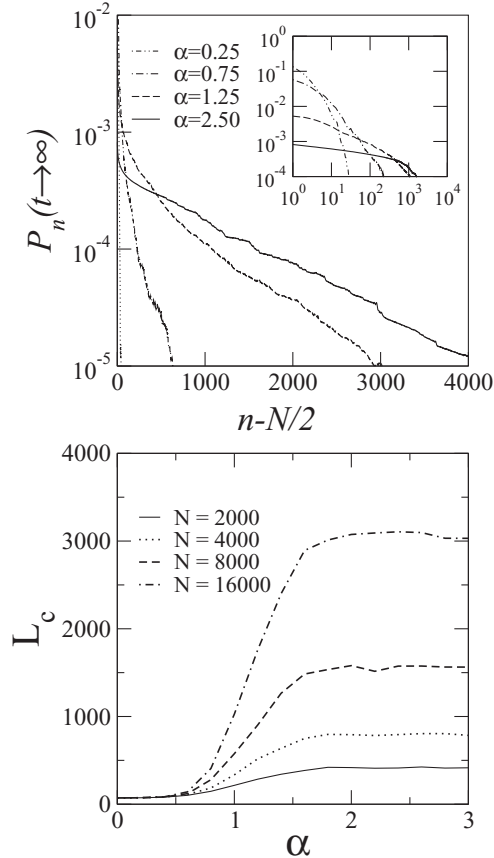


FIG. 11. Top: long-time wave-packet profile for some representative values of the correlation exponent α . The local occupation probability P_n was evaluated at $t = 5N$ with $N = 16000$. The main panel shows the development of an exponential tail while the inset emphasizes the power-law decay at intermediate values of α prior to the exponential cutoff. Bottom: cutoff length L_c versus α for various sizes N averaged over 10^3 distinct realizations of disorder. While the cutoff is size independent for $\alpha < 1/2$, it scales linearly with the system size for $\alpha > 3/2$.

irrelevant. This is the case for $\alpha > 3/2$ whereupon the return probability scales almost linearly with the chain size. The slight deviation from the linear scaling near $\alpha = 3/2$ suggests that much larger chain sizes would be required to accurately capture the asymptotic scaling in the vicinity of this point.

Last, in order to go deeper towards understanding the several scenarios unveiled by the finite-size scaling behavior, we plot the wave-packet profile after a large number of steps in the top panel of Fig. 11 for some representative values of α . For small degree of correlations ($\alpha < 1/2$), the wave packet remains strongly localized around the initial position. Above this value, the wave packet develops a slowly decaying power-law behavior interrupted by an exponential

cutoff. Then the wave packet gets about a flat profile for $\alpha > 3/2$ —presenting a very slow decay followed by the cutoff—thereby reaching the ultimate delocalized regime. In this case, $\sigma \propto N$ while $R \propto \ln N/N$. In the bottom panel of Fig. 11 we display the cutoff length L_c against α for various N . The cutoff is estimated as the distance to the initial position at which the statistically stationary wave function becomes smaller than 10^{-30} . For $\alpha < 1/2$ the cutoff is size independent while it reaches a plateau for $\alpha > 3/2$ on which $L_c \propto N$.

IV. CONCLUDING REMARKS

In this work we unveiled the dynamics of a disordered DTQW featuring long-range correlations controlled by a single parameter, α , displaying a power-law spectrum of the form $1/k^{2\alpha}$. Our results showed that ballistic dynamics is maintained in the presence of disorder provided the degree of correlations is high enough. Four distinct regimes were identified from the finite-size scaling analysis of the wave-packet width σ and the return probability. Strong localization persists for $\alpha < 1/2$, when the underlying random phase landscape is stationary. The usual regime of nearly uniform delocalization sets in for $\alpha > 3/2$ reflecting the nonfractal aspect of the phase distribution. We also identified the existence of two intermediate regimes on which the wave packet develops a slowly decaying power-law tail. Whenever the random phase landscape has antipersistent increments ($1/2 < \alpha < 1$) the quantum walker presents weak delocalization, with σ scaling sublinearly with the chain size. For nonstationary phase sequences with persistent increments ($1 < \alpha < 3/2$), σ spans over a finite fraction of the chain, although the return probability still scales sublinearly.

Our work builds upon the impact of Anderson localization-delocalization transitions in DTQWs. Quantum walks are convenient platforms for quantum simulation [26,35,40,41], and the role of different kinds of noise must be taken into account, such as those able to drive a Anderson localization breakdown [45]. The interplay between localized and delocalized dynamics can also be very useful in the realm of quantum communication protocols [54,55].

Further extensions of our work can be carried out by considering the effects of coin disorder [26] and the overall relationship between localization properties and the underlying topological phases [32]. Another direction can be taken towards studying the dynamics of many-particle quantum walk [13] against correlated disorder.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq, CAPES, FINEP, CNPq-Rede Nanobioestruturas, and FAPEAL (Alagoas State Agency).

- [1] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, *Phys. Rev. A* **48**, 1687 (1993).
 [2] J. Kempe, *Contemp. Phys.* **44**, 307 (2003).
 [3] S. E. Venegas-Andraca, *Quant. Info. Proc.* **11**, 1015 (2012).

- [4] N. Shenvi, J. Kempe, and K. B. Whaley, *Phys. Rev. A* **67**, 052307 (2003).
 [5] A. M. Childs and J. Goldstone, *Phys. Rev. A* **70**, 022314 (2004).

- [6] T. G. Wong, K. Wünscher, J. Lockhart, and S. Severini, *Phys. Rev. A* **98**, 012338 (2018).
- [7] A. M. Childs, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 180501 (2009).
- [8] N. B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers, and V. Kendon, *Phys. Rev. A* **81**, 042330 (2010).
- [9] E. Farhi and S. Gutmann, *Phys. Rev. A* **58**, 915 (1998).
- [10] C. A. Ryan, M. Laforest, J. C. Boileau, and R. Laflamme, *Phys. Rev. A* **72**, 062317 (2005).
- [11] H. Schmitz, R. Matjeschk, C. Schneider, J. Glueckert, M. Enderlein, T. Huber, and T. Schaetz, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 090504 (2009).
- [12] H. B. Perets, Y. Lahini, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, and Y. Silberberg, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 170506 (2008).
- [13] L. Sansoni, F. Sciarrino, G. Vallone, P. Mataloni, A. Crespi, R. Ramponi, and R. Osellame, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 010502 (2012).
- [14] E. Flurin, V. V. Ramasesh, S. Hacoheh-Gourgy, L. S. Martin, N. Y. Yao, and I. Siddiqi, *Phys. Rev. X* **7**, 031023 (2017).
- [15] A. Romanelli, *Phys. Rev. A* **80**, 042332 (2009).
- [16] D. Meyer, *J. Stat. Phys.* **85**, 551 (1996).
- [17] Y. Omar, N. Paunković, L. Sheridan, and S. Bose, *Phys. Rev. A* **74**, 042304 (2006).
- [18] P. K. Pathak and G. S. Agarwal, *Phys. Rev. A* **75**, 032351 (2007).
- [19] P. P. Rohde, A. Schreiber, M. Štefaňák, I. Jex, and C. Silberhorn, *New J. Phys.* **13**, 013001 (2011).
- [20] P. Xue and B. C. Sanders, *Phys. Rev. A* **85**, 022307 (2012).
- [21] L. Rigovacca and C. Di Franco, *Sci. Rep.* **6**, 22052 (2016).
- [22] A. Schreiber, A. Gábris, P. P. Rohde, K. Laiho, M. Štefaňák, V. Potoček, C. Hamilton, I. Jex, and C. Silberhorn, *Science* **336**, 55 (2012).
- [23] J. K. Gamble, M. Friesen, D. Zhou, R. Joynt, and S. N. Coppersmith, *Phys. Rev. A* **81**, 052313 (2010).
- [24] S. D. Berry and J. B. Wang, *Phys. Rev. A* **83**, 042317 (2011).
- [25] V. Kendon, *Math. Struct. Comp. Sci.* **17**, 1169 (2007).
- [26] C. M. Chandrashekar, *Phys. Rev. A* **74**, 032307 (2006).
- [27] P. M. Preiss, R. Ma, M. E. Tai, A. Lukin, M. Rispoli, P. Zupancic, Y. Lahini, R. Islam, and M. Greiner, *Science* **347**, 1229 (2015).
- [28] H. Obuse and N. Kawakami, *Phys. Rev. B* **84**, 195139 (2011).
- [29] T. Kitagawa, M. A. Broome, A. Fedrizzi, M. S. Rudner, E. Berg, I. Kassal, A. Aspuru-Guzik, E. Demler, and A. G. White, *Nat. Commun.* **3**, 882 (2012).
- [30] T. Kitagawa, *Quant. Info. Proc.* **11**, 1107 (2012).
- [31] T. Rakovszky and J. K. Asboth, *Phys. Rev. A* **92**, 052311 (2015).
- [32] J. M. Edge and J. K. Asboth, *Phys. Rev. B* **91**, 104202 (2015).
- [33] A. Wójcik, T. Łuczak, P. Kurzyński, A. Grudka, T. Gdala, and M. Bednarska-Bzdęga, *Phys. Rev. A* **85**, 012329, (2012).
- [34] R. Zhang, P. Xue, and J. Twamley, *Phys. Rev. A* **89**, 042317 (2014).
- [35] F. De Nicola, L. Sansoni, A. Crespi, R. Ramponi, R. Osellame, V. Giovannetti, R. Fazio, P. Mataloni, and F. Sciarrino, *Phys. Rev. A* **89**, 032322 (2014).
- [36] J. Ghosh, *Phys. Rev. A* **89**, 022309 (2014).
- [37] Q. Zhao and J. Gong, *Phys. Rev. B* **92**, 214205 (2015).
- [38] I. Vakulchyk, M. V. Fistul, P. Qin, and S. Flach, *Phys. Rev. B* **96**, 144204 (2017).
- [39] M. Zeng and E. H. Yong, *Sci. Rep.* **7**, 12024 (2017).
- [40] A. Schreiber, K. N. Cassemiro, V. Potoček, A. Gábris, I. Jex, and C. Silberhorn, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 180403 (2011).
- [41] A. Crespi, R. Osellame, R. Ramponi, V. Giovannetti, R. Fazio, L. Sansoni, F. De Nicola, F. Sciarrino, and P. Mataloni, *Nat. Photon.* **7**, 322 (2013).
- [42] R. Vieira, E. P. M. Amorim, and G. Rigolin, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 180503 (2013).
- [43] R. Vieira, E. P. M. Amorim, and G. Rigolin, *Phys. Rev. A* **89**, 042307 (2014).
- [44] Q.-Q. Wang, X.-Y. Xu, W.-W. Pan, K. Sun, J.-S. Xu, G. Chen, Y.-J. Han, C.-F. Li, and G.-C. Guo, *Optica* **5**, 1136 (2018).
- [45] F. A. B. F. de Moura and M. L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3735 (1998).
- [46] D. H. Dunlap, H.-L. Wu, and P. W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 88 (1990).
- [47] P. Phillips and H.-L. Wu, *Science* **252**, 1805 (1991).
- [48] F. M. Izrailev and A. A. Krokhin, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4062 (1999).
- [49] R. P. A. Lima, M. L. Lyra, E. M. Nascimento, and A. D. de Jesus, *Phys. Rev. B* **65**, 104416 (2002).
- [50] F. A. B. F. de Moura, M. D. Coutinho-Filho, E. P. Raposo, and M. L. Lyra, *Phys. Rev. B* **66**, 014418 (2002).
- [51] F. A. B. F. de Moura, M. D. Coutinho-Filho, E. P. Raposo, and M. L. Lyra, *Phys. Rev. B* **68**, 012202 (2003).
- [52] F. Domínguez-Adame, V. A. Malyshev, F. A. B. F. de Moura, and M. L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 197402 (2003).
- [53] J. Rodríguez-Laguna, S. N. Santalla, G. Ramirez, and G. Sierra, *New J. Phys.* **18**, 073025 (2016).
- [54] G. M. A. Almeida, F. A. B. F. de Moura, T. J. G. Apollaro, and M. L. Lyra, *Phys. Rev. A* **96**, 032315 (2017).
- [55] G. M. A. Almeida, F. A. B. F. de Moura, and M. L. Lyra, *Phys. Lett. A* **382**, 1335 (2018).
- [56] U. Kuhl, F. M. Izrailev, A. A. Krokhin, and H.-J. Stockmann, *Appl. Phys. Lett.* **77**, 633 (2000).
- [57] U. Kuhl, F. M. Izrailev, and A. A. Krokhin, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 126402 (2008).
- [58] L. D. da Silva, A. Ranciaro Neto, M. O. Sales, M. L. Lyra, and F. A. B. F. de Moura, *Physica A* **486**, 895 (2017).
- [59] B. B. Mandelbrot and J. R. Wallis, *Water Resour. Res.* **5**, 228 (1969).



Localization properties of a discrete-time 1D quantum walk with generalized exponential correlated disorder

C.V.C. Mendes, G.M.A. Almeida, M.L. Lyra, F.A.B.F. de Moura *

Instituto de Física, Universidade Federal de Alagoas, Maceió AL 57072-970, Brazil



ARTICLE INFO

Article history:

Received 30 December 2020
 Received in revised form 26 January 2021
 Accepted 27 January 2021
 Available online 2 February 2021
 Communicated by M.G.A. Paris

Keywords:

Quantum walk
 Correlated disorder
 Localization

ABSTRACT

We study the dynamics of the 1D Hadamard quantum walk featuring generalized exponential correlated phase disorder. We report the existence of distinct dynamical regimes and discuss the prospect of a judicious tuning of the strength of localization of the walker via the degree of correlation. In particular, we unveil that when the typical correlation length is smaller than the chain size, the maximum spreading of the quantum wavepacket is achieved when the underlying disorder displays Gaussian correlations. Our work provides a framework for investigating the weakening of Anderson localization due to correlated disorder and may also find applications in the context of quantum information processing.

© 2021 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

Anderson localization is one of the most solid concepts in condensed matter physics [1]. It plays a crucial role in metallic-insulator transitions and is the main wave mechanism behind some ubiquitous transport properties displayed by a wide variety of natural and artificial systems. In the simplest scenario, a single particle hopping through a 1D chain featuring a random potential landscape suffers a lack of diffusion thereby remaining trapped around a finite region due to exponential localization of every eigenstate of the system [2].

While the above is true for uncorrelated disorder, it may breakdown in the presence of embedded correlations. First results along this direction came about three decades ago [3,4] addressing the case of short-range spatial correlations. Moreover, the appearance of a band of extended states with sharp mobility edges in 1D systems with long-range correlated disorder was reported in Refs. [5] and [6]. This Anderson-type metal-insulator transition would be experimentally confirmed using waveguides [7] shortly after that. Another interesting class of systems displaying correlated disorder is the one featuring a finite correlation length [8–11]. It has been shown that maximum localization in disordered continuous potentials takes place when the correlation length is of the order of the wavelength [11]. The emergence of extended states as well as the coexistence between disordered and ordered bands are also verified in quasi-1D systems, such as ladder chains [13,14]. For a

review of correlated disorder and its impact on Anderson localization phenomena, see Ref. [12].

Many of the disorder configurations discussed above have recently been explored in the light of quantum information processing [15–18]. The motivation is twofold. First, it is desirable to push the limits of such protocols against various forms of noise and, secondly, sometimes disorder can be useful given one is able control it (see, e.g., Ref. [15]). Along this direction, we aim to investigate how correlated disorder affect the dynamics of a discrete-time quantum walk (DTQW) [19,20].

In such, a qubit state (say, on a spin 1/2) is set to propagate by repeatedly applying a unitary operator to a given initial configuration. It first shuffles the internal state of the qubit (more precisely, it generates a superposition) and then shifts its coefficients to the left or right, for a quantum walk on the line, depending on the local spin orientation. By doing it several times, interference effects yield a ballistic spreading profile, in contrast with a diffusive one for the classical random walk, thus providing much faster hitting times. On top of that, DTQWs have been treated as a platform for, e.g., designing quantum algorithms [21], universal quantum computation [22], and studying complex phenomena such as quantum phase transitions [23], topological phases [24–28], localization [24,27,29–36], and even nonlinear phenomena [37–39].

Notwithstanding there are plenty of works addressing the effects of disorder in DTQWs alongside practical implementations [40,41], our goal here is to unveil the subtleties of a transition from strong to weak localization induced by correlated disorder. In a previous work, we dealt with long-range correlations following power law spectrum [36]. Here, in particular, we investigate a class of generalized exponential correlations. These are versatile

* Corresponding author.

E-mail address: fidelis@fis.ufal.br (F.A.B.F. de Moura).

correlation functions having Gaussian, pure exponential and uncorrelated disorder as particular cases. Furthermore, stretched exponential correlations frequently develops during the relaxation process in glassy materials [42–46]. Exponential correlated disorder models find support on various physical backgrounds. Stretched exponential correlation functions are widely known to arise from the well known Kosterlitz–Thouless-like transition [47]. Similar behavior can also be found for the nematic director field [48], within enzymatic catalytic activity of lipase B from *Candida Antarctica* [49], in distributions of radio and light emissions from galaxies, and economy, to name a few [50].

In this work we focus on unveiling how the interplay between deviations from Gaussianity and the typical correlation length affects the dynamics of a Hadamard DTQW on the line [20].

2. Model and formalism

The two main ingredients for setting up a DTQW on a 1D array are the coin (qubit) space \mathcal{H}_C spanned by $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ plus another set \mathcal{H}_P for the position states $\{|n\rangle\}$ ($n = 1, 2, \dots, N$), such that the total Hilbert space reads $\mathcal{H} = \mathcal{H}_C \otimes \mathcal{H}_P$ [20]. We now need some operators to act on those states, one of which must carry out the “coin tossing” step. For this, we consider the Hadamard coin,

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where it acts solely on the qubit sector \mathcal{H}_C . The next procedure is the so-called conditional shift S that moves the walker one way or the other depending on its internal state, that is $S|\uparrow\rangle|n\rangle \rightarrow |\uparrow\rangle|n+1\rangle$ and $S|\downarrow\rangle|n\rangle \rightarrow |\downarrow\rangle|n-1\rangle$. Following Ref. [34], we add phase disorder in this very step so that it reads

$$S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \sum_n (e^{i2\pi\phi_{n+1}} |n+1\rangle\langle n|) + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \sum_n (e^{i2\pi\phi_{n-1}} |n-1\rangle\langle n|), \quad (2)$$

where ϕ_n is some disordered phase. Putting all those elements together, the DTQW is embodied by a unitary operator $U = S(C \otimes I)$ acting on $|\psi(t=0)\rangle$ over and over until in the t -th step $|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(t=0)\rangle$.

Let us now make some considerations over the type of disorder we deal with in this work. Instead of assigning a standard (uncorrelated) random box distribution to $\{\phi_n\}$ – as done in [34], where it was shown that localization inevitably sets up for strong enough static disorder – we address a special kind of correlated fluctuations, namely generalized exponential correlated disorder generated from [51]

$$V_n = \sum_{m=1}^N \eta_m \exp[-(|n-m|/\zeta)^\alpha], \quad (3)$$

where η_m represents a random phase uniformly distributed in interval $[-0.5, 0.5]$ (independently generated for each sample) and $\{\alpha, \zeta\}$ controls the degree of correlations. The parameter α controls the degree of non-Gaussianity in the disorder distribution. For $\alpha = 0$ there is no disorder. Gaussian correlations correspond to $\alpha = 2$ and the particular case of $\alpha = 1$ accounts for exponentially decaying correlations, where ζ ends up being the standard correlation length [52]. In the limiting case of $\zeta = 0$ one reaches a fully uncorrelated disorder distribution.

We now normalize $\{V_n\}$ such that $\langle V_n \rangle = 0$ and $\langle V_n^2 \rangle = 1$, so as to maintain the disorder properties regardless of the system size N , and further define $\phi_n = 0.5 \tanh(V_n) + 0.5$ to set its range

within interval $[0, 1]$ in order to set the phases in the shift operator [Eq. (2)] in between 0 and 2π . We emphasize that this transformation from V_n to ϕ_n does not affect the correlation profile embedded in the disorder distribution. To have a better look over the resulting phase landscape, in Fig. 1 we show some typical samples of the sequence $\{\phi_n\}$ for various ζ and α values and $N = 10000$. In the same Figure (bottom panels), we plot the corresponding autocorrelation functions, defined as

$$C(r) = \frac{1}{N-r} * \sum_{n=1}^{N-r} [(\phi_n \phi_{n+r}) - \langle \phi_n \rangle^2], \quad (4)$$

so as to unveil what is going on underneath it. Therein, we clearly see the role of parameters ζ and α . The former acts by smoothing up the fluctuations, what increases the degree of correlations within the disorder distribution. This results in a slower decay of the autocorrelation function with distance r . Now keeping ζ fixed, the behavior of α is much more subtle. It strongly depends on ζ and N in a way it may either hold the decay of the correlation function for longer r or push it more critically (see Fig. 1; compare the outcomes for $\zeta = 1$ and $\zeta = 1000$ in particular). Later on, we will see that this ultimately depends on the ratio ζ/N .

Throughout this paper, our analysis is largely built upon the wavepacket spreading (standard deviation)

$$\sigma(t) = \sqrt{\sum_n (n - \langle n(t) \rangle)^2 P_n(t)}, \quad (5)$$

where $P_n(t) = |\langle \psi(t) | \uparrow, n \rangle|^2 + |\langle \psi(t) | \downarrow, n \rangle|^2$ is the walker’s occupation probability at the n -th site and $\langle n(t) \rangle = \sum_n n P_n(t)$ is the average position.

3. Results and discussion

In this section we display and discuss our numerical results for the disordered DTQW featuring generalized exponential correlations introduced previously. The initial state is localized (and symmetric in respect to the coin) in the middle of the chain at $n_0 = N/2$ having the form

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow, n_0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} |\downarrow, n_0\rangle, \quad (6)$$

for all the simulations below. In addition, every plotted quantity is averaged over 1000 independent realizations of disorder unless stated otherwise. We first show the general profile of the time evolution of the walker in Fig. 2 where we display the space-time diagram for $P_n(t)$ for a representative value of α and correlations length ζ representing short and long-ranged correlated disorder. We clearly observe that for short-ranged correlated disorder ($\zeta = 1$) the walker remains fully localized around its initial position. This should come with no surprise as the underlying correlations are effectively low and disordered DTQWs share some similarities with Anderson localization theory [24,27,29–34]. For long-ranged correlated disorder ($\zeta = 1000$), we spot a significant portion of the probability amplitude coming out of n_0 whereas a finite fraction of the initial packet is still retained around the initial site. This is another characteristic of the localized nature of the quantum walker. Next, we move towards a more accurate description of the localization properties of the system by analyzing $\sigma(t)$ in chains with different sizes.

In Fig. 3 we plot the time evolution of the standard deviation $\sigma(t)$ versus t/N for $N = 2000$ up to 16000. For short-range correlations ($\zeta = 1$) the wavepacket width displays an initial diffusive spreading with $\sigma \propto t^{1/2}$. This indicates that the initial spreading

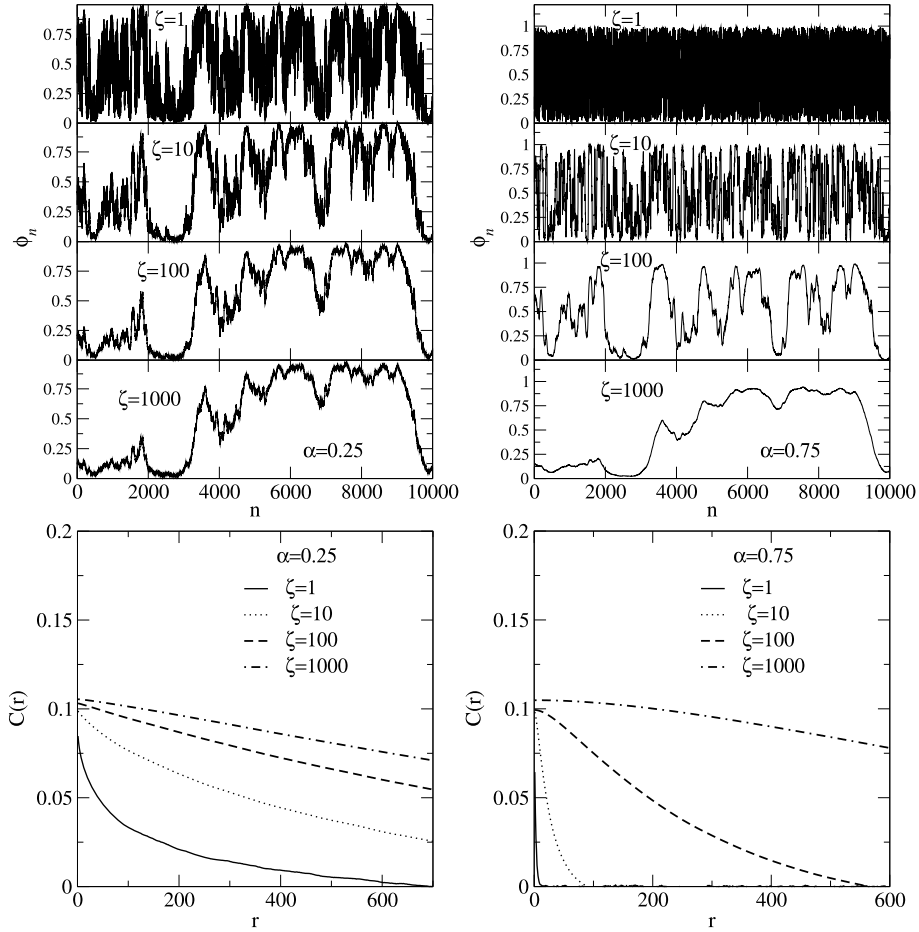


Fig. 1. Top: typical, one sample series of $\{\phi_n\}$ for $\alpha = 0.25, 0.75$ and $\zeta = 1, 10, 100, 1000$ with $N = 10000$. Bottom: corresponding autocorrelation functions generated by $C(r) = [1/(N-r)] * \sum_{n=1}^{N-r} [(\phi_n \phi_{n+r}) - \langle \phi_n \rangle^2]$ averaged over 30 independent samples, against r .

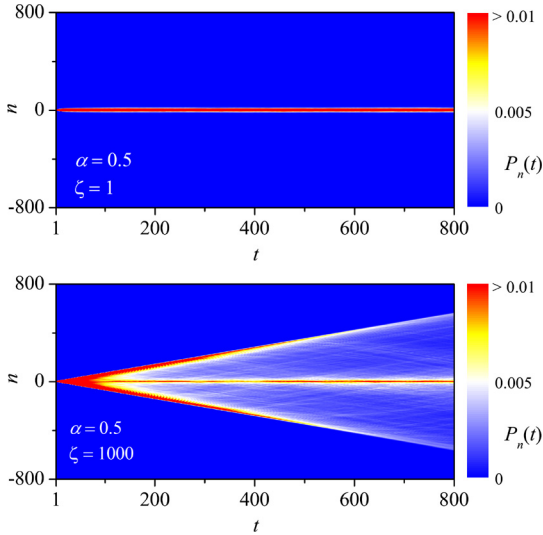


Fig. 2. Time evolution of the occupation probability $P_n(t)$ versus n for $\alpha = 0.5$ and $\zeta = 1$ (top panel) and $\zeta = 1000$ (bottom panel). Notice that the walker remains fully localized for short-ranged correlations while a significant part of it spreads out in the case of long-range correlated disorder. (For interpretation of the colors in the figure(s), the reader is referred to the web version of this article.)

is already strongly influenced by the underlying disorder. At long-times, the wavepacket width saturates at a finite size-independent value signaling Anderson localization. For long-ranged correlated disorder ($\zeta = 500$ and 1000), the initial spreading becomes ballis-

tic, thus not being affected by disorder and becoming similar to the one taking place in a disorder-free DTQW. (In this case, saturation of the wavepacket width at $t \simeq N$ occurs due to finite size effects.) It is clear to spot from Eq. (3) that taking the limit $\zeta \rightarrow \infty$ renders $V_n = \sum_m \eta_m$, meaning that all the phases in the shift operator [Eq. 2] (for every n) are the same.

The long-time behavior of σ and its dependence with α and ζ calls for a more detailed analysis. By analyzing the scaled wavepacket width in the asymptotic limit, $\sigma/N = \sigma(t \rightarrow \infty)/N$, versus the scaled correlation length ζ/N , we observe that $\sigma/N \propto (\zeta/N)/[1 + b(\zeta/N)]$ regardless of α , with b being a fit parameter. Therefore for $\zeta/N \ll 1$ entails that the spreading is proportional to ζ , meaning that if the correlation length is much smaller than the chain size, it dictates the typical localization length. Fig. 4 shows that for a representative case with $\alpha = 1$. For $\zeta > N$ our results indicate that the $\sigma(t \rightarrow \infty)/N$ is roughly constant. This unveils that the wavepacket will spread over the entire chain when the typical correlation length becomes much larger than the chain size, the width being proportional to the chain size.

To see it further, in Fig. 5 we plot the scaled wavefunction width versus α for various ζ/N values. It is now seen that the long and short-ranged correlated disorder regimes present quite distinct trends. For $\zeta > N$, we observe that the scaled width of the walker increases monotonically as α is increased. On the other hand, σ/N reaches a maximum around $\alpha \simeq 2$ when $\zeta < N$. This indicates that in the regime of finite correlation lengths (smaller than the chain size), Gaussian-like correlations in the disorder distribution allow for the maximum spreading of the wavepacket, thus signaling the condition of maximum weakening of Anderson localization.

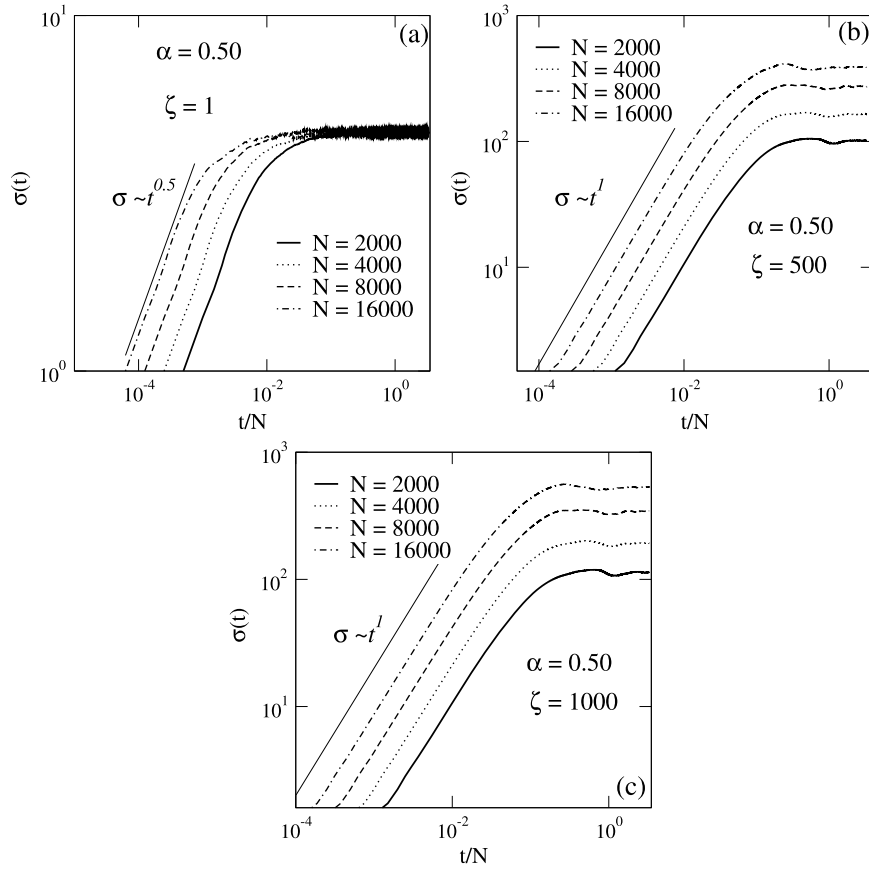


Fig. 3. Standard deviation $\sigma(t)$ versus t/N for (a) $\zeta = 1$, (b) $\zeta = 500$, (c) $\zeta = 1000$, fixed $\alpha = 0.5$, and various system sizes from $N = 2000$ up to 16000.

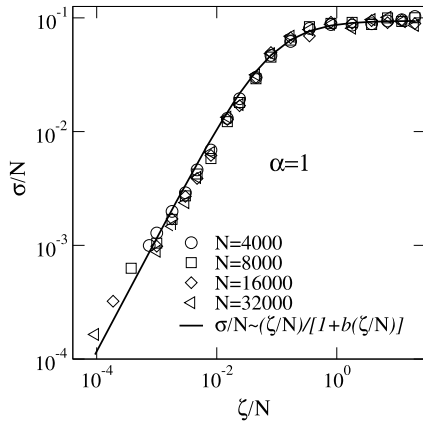


Fig. 4. Scaled long-time wavefunction spreading $\sigma/N = \sigma(t \rightarrow \infty)/N$ versus ζ/N for $N = 4000$ up to 32000 and $\alpha = 1$. Solid line is the fitting function, with b being an adjustable parameter.

In order to analyze the ubiquitous behavior around $\alpha = 2$ we carry out a statistical analysis over the disorder distribution by taking series of increments of ϕ_n defined as $\theta_n = \phi_n - \phi_{n-1}$. Therefore, the series $\{\theta_n\}$ contains $N - 1$ terms. Next we divide it in s segments of size ζ . The number of segments is then $N_s = N/\zeta$ and we calculate the variance within each segment as $\Delta_s = \sqrt{\langle \theta_n^2 \rangle_s - \langle \theta_n \rangle_s^2}$ where $\langle \cdot \rangle_s$ represents the average within segment s . The mean local variance of the increments is finally given by $\Delta = \sum_{s=1}^{N/\zeta} \Delta_s / N_s$. In Fig. 6 we plot Δ (averaged over 20 independent samples) versus α and observe that as it approaches $\alpha = 2$ the local variance decreases suggesting that phase fluctuations are smoother in that region, what explains the trend seen in Fig. 5 for $\zeta < N$.

4. Concluding remarks

In this work we studied the dynamics of a disordered DTQW featuring a generalized exponential correlated phase disorder controlled by two parameters, namely the generalization exponent α and the generalized correlation length ζ . We showed that for $\zeta \ll N$, the walker remains trapped around its initial position after an initial diffusive spreading, regardless of the α value. Our calculations also indicate that the size of the region over which the walker remains trapped scales as $\sigma \propto \zeta$. On the other hand for $\zeta \gg N$ the walker delocalizes ballistically. In this regime increasing α leads to a monotonic increase of the wavepacket width. When the typical correlation length ζ is smaller than the system size N instead, the saturation wavepacket width varies non-monotonically with α , reaching maximum for $\alpha \simeq 2$, slowly decaying for larger values of α . It is worth pointing out that $\alpha = 2$ brings about Gaussian correlations. By evaluating the mean local variance over segments sized by the generalized correlation length, we showed that phase fluctuations get smoother in the vicinity of $\alpha = 2$.

Experiments addressing delocalization transition induced by long-range correlated disorder have put forward ways to manipulate correlations within disordered setups [7]. Efforts along similar lines should bring valuable support for the theoretical predictions concerning discrete-time quantum walk dynamics in distinct disorder regimes.

CRediT authorship contribution statement

C.V.C. Mendes: Conceptualization, Methodology, Numerical calculations of Figs. 3, 4. **G.M.A. Almeida:** Software, Validation, Writing – original draft preparation. **M.L. Lyra:** Software, Validation,

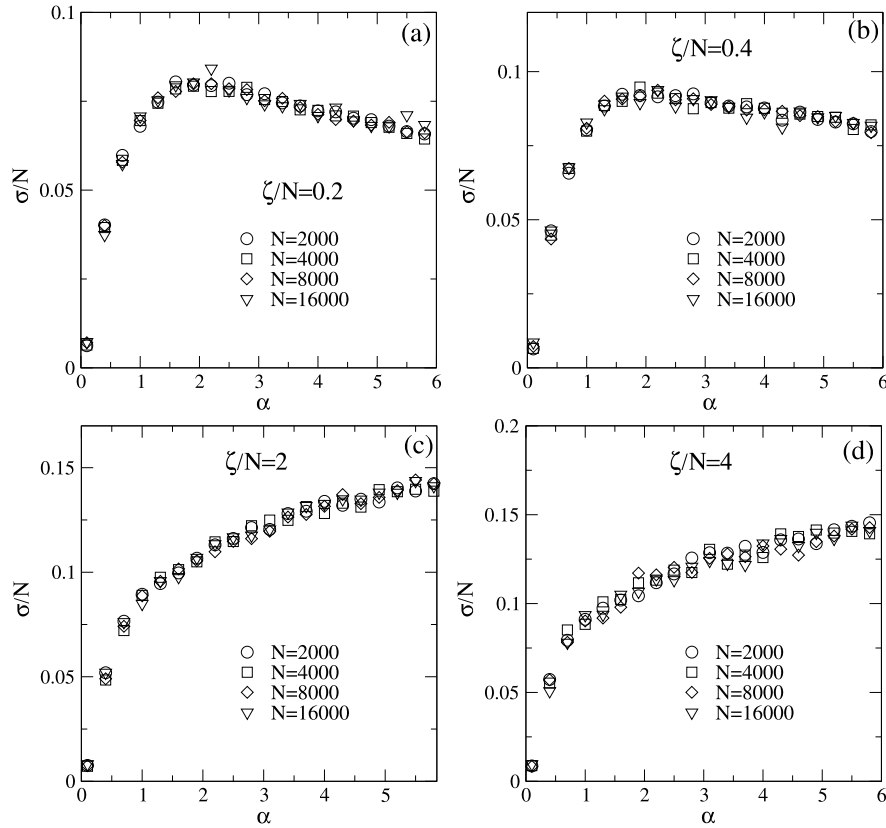


Fig. 5. Scaled long-time wavefunction spreading $\sigma/N = \sigma(t \rightarrow \infty)/N$ versus α for (a) $\zeta/N = 0.2$, (b) $\zeta/N = 0.4$, (c) $\zeta/N = 2$, and (d) $\zeta/N = 4$, and $N = 2000$ up to 16000.

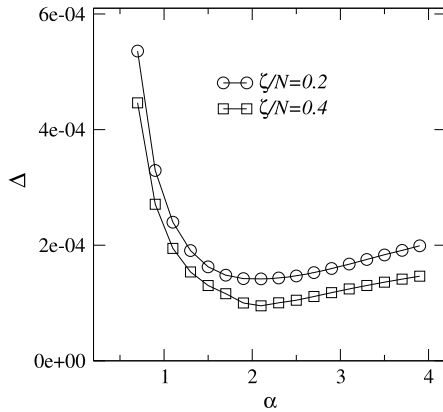


Fig. 6. Mean local variance $\Delta = \sum_{s=1}^{N/\zeta} \Delta_s/N_s$ against α over s segments $\Delta_s = \sqrt{\langle \theta_n^2 \rangle_s - \langle \theta_n \rangle_s^2}$, where $\theta_n = \phi_n - \phi_{n-1}$ and $N_s = N/\zeta$. Seen is the result of an average carried out over 20 independent disorder realizations for $\zeta/N = 0.2, 0.4$, with $N = 10000$.

Writing – original draft preparation. **F.A.B.F. de Moura:** Conceptualization, Methodology, Software, Numerical calculations of Figs. 1, 2, 5, 6, Writing – original draft preparation.

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgements

This work was partially supported by CNPq, CAPES, FINEP, CNPq-Rede Nanobioestruturas, and FAPEAL (Alagoas state agency).

References

- [1] F. Evers, A.D. Mirlin, *Rev. Mod. Phys.* 80 (2008) 1355.
- [2] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello, T.V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* 42 (1979) 673.
- [3] J.C. Flores, *J. Phys. Condens. Matter* 1 (1989) 8471.
- [4] D.H. Dunlap, H.L. Wu, P.W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* 65 (1990) 88.
- [5] F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 3735.
- [6] F.M. Izrailev, A.A. Krokchin, *Phys. Rev. Lett.* 82 (1999) 4062.
- [7] U. Kuhl, F.M. Izrailev, A.A. Krokchin, H.-J. Stockmann, *Appl. Phys. Lett.* 77 (2000) 633.
- [8] E. Gurevich, A. Iomin, *Phys. Rev. E* 83 (2011) 011128.
- [9] E. Gurevich, O. Kenneth, *Phys. Rev. A* 79 (2009) 063617.
- [10] G.M. Falco, A.A. Fedorenko, J. Giacomelli, M. Modugno, *Phys. Rev. A* 82 (2010) 053405.
- [11] H. Eleuch, M. Hilke, *New J. Phys.* 17 (2015) 083061.
- [12] F. Izrailev, A. Krokchin, N. Makarov, *Phys. Rep.* 512 (2012) 125.
- [13] S. Sil, S.K. Maiti, A. Chakrabarti, *Phys. Rev. B* 78 (2008) 113103.
- [14] F.A.B.F. de Moura, R.A. Caetano, M.L. Lyra, *Phys. Rev. B* 81 (2010) 125104.
- [15] G.M.A. Almeida, F.A.B.F. de Moura, T.J.G. Apollaro, M.L. Lyra, *Phys. Rev. A* 96 (2017) 032315.
- [16] G.M.A. Almeida, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, *Phys. Lett. A* 382 (2018) 1335.
- [17] G.M.A. Almeida, C.V.C. Mendes, M.L. Lyra, F.A.B.F. de Moura, *Ann. Phys.* 398 (2018) 180.
- [18] G.M.A. Almeida, A.M.C. Souza, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, *Phys. Lett. A* 383 (2019) 125847.
- [19] Y. Aharonov, L. Davidovich, N. Zagury, *Phys. Rev. A* 48 (1993) 1687.
- [20] J. Kempe, *Contemp. Phys.* 44 (2003) 307.
- [21] N. Shenvi, J. Kempe, K.B. Whaley, *Phys. Rev. A* 67 (2003) 052307.
- [22] N.B. Lovett, S. Cooper, M. Everitt, M. Trevers, V. Kendon, *Phys. Rev. A* 81 (2010) 042330.
- [23] C.M. Chandrashekar, R. Lafamme, *Phys. Rev. A* 78 (2008) 022314.
- [24] H. Obuse, N. Kawakami, *Phys. Rev. B* 84 (2011) 195139.
- [25] T. Kitagawa, M.A. Broome, A. Fedrizzi, M.S. Rudner, E. Berg, I. Kassal, A. Aspuru-Guzik, E. Demler, A.G. White, *Nat. Commun.* 3 (2012) 882.
- [26] E. Flurin, V.V. Ramasesh, S. Hacothen-Gourgy, L.S. Martin, N.Y. Yao, I. Siddiqi, *Phys. Rev. X* 7 (2017) 031023.
- [27] T. Rakovszky, J.K. Asboth, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 052311.
- [28] J.M. Edge, J.K. Asboth, *Phys. Rev. B* 91 (2015) 104202.
- [29] A. Wojcik, T. Luczak, P. Kurzynski, A. Grudka, T. Gdala, M. Bednarska-Bzdega, *Phys. Rev. A* 85 (2012) 012329.

- [30] R. Zhang, P. Xue, J. Twamley, Phys. Rev. A 89 (2014) 042317.
- [31] F. De Nicola, L. Sansoni, A. Crespi, R. Ramponi, R. Osellame, V. Giovannetti, R. Fazio, P. Mataloni, F. Sciarrino, Phys. Rev. A 89 (2014) 032322.
- [32] Q. Zhao, J. Gong, Phys. Rev. B 92 (2015) 214205.
- [33] I. Vakulchyk, M.V. Fistul, P. Qin, S. Flach, Phys. Rev. B 96 (2017) 144204.
- [34] M. Zeng, E.H. Yong, Sci. Rep. 7 (2017) 12024.
- [35] A.R.C. Buarque, W.S. Dias, Phys. Rev. E 100 (2019) 032106.
- [36] C.V.C. Mendes, G.M.A. Almeida, M.L. Lyra, F.A.B.F. de Moura, Phys. Rev. E 99 (2019) 022117.
- [37] C.-W. Lee, P. Kurzynski, H. Nha, Phys. Rev. A 92 (2015) 052336.
- [38] A.R.C. Buarque, W.S. Dias, Phys. Rev. A 101 (2020) 023802.
- [39] J.P. Mendonça, F.A.B.F. de Moura, M.L. Lyra, G.M.A. Almeida, Phys. Rev. A 101 (2020) 062335.
- [40] A. Schreiber, K.N. Cassemiro, V. Potocek, A. Gabris, I. Jex, C. Silberhorn, Phys. Rev. Lett. 106 (2011) 180403.
- [41] A. Crespi, R. Osellame, R. Ramponi, V. Giovannetti, R. Fazio, L. Sansoni, F. De Nicola, F. Sciarrino, P. Mataloni, Nat. Photonics 7 (2013) 322.
- [42] J.C. Phillips, Rep. Prog. Phys. 59 (1996) 1133.
- [43] J. Kakalios, R.A. Street, W.B. Jackson, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1037.
- [44] D.C. Johnston, Phys. Rev. B 74 (2006) 184430.
- [45] M. Kirkengen, J. Bergli, Phys. Rev. B 79 (2009) 075205.
- [46] Y.T. Yu, M.Y. Wang, D.W. Zhang, B. Wang, G. Sant, M. Bauchy, Phys. Rev. Lett. 115 (2015) 165901.
- [47] W.S. Dias, F.A.B.F. de Moura, M.D. Coutinho-Filho, M.L. Lyra, Phys. Lett. A 374 (2010) 3572.
- [48] Y.-K. Yu, P.L. Taylor, E.M. Terentjev, Phys. Rev. Lett. 81 (1998) 128.
- [49] O. Flomenbom, et al., Proc. Natl. Acad. Sci. 102 (2005) 2368.
- [50] J. Laherrère, D. Sornette, Eur. Phys. J. B 2 (1998) 525.
- [51] J.L.L. dos Santos, M.O. Sales, F.A.B.F. de Moura, Physica A 413 (2014) 31.
- [52] M.O. Sales, F.A.B.F. de Moura, Physica E 45 (2012) 97.